





# علم المعرفة

سلسلة كتب ثقافية شهيرة يديرها المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب - الكويت

صدرت السلسلة في يناير 1978 بإشراف أحمد مشاري العدواني 1923 - 1990

114

## الرياضيات في حياتنا

ترجمة: زلاتكاشبورير

مراجعة: د. فاطمة عبدالقادر الما



1987  
nūnū

المشرف العام :

احمد مشاري العدواني  
الأمين العام للمجلس

نائب المشرف العام :

د. خليفة الوقيان  
الأمين العام المساعد

هيئة التحرير :

د. فؤاد زكريا المستشار  
د. أسامة الخولي  
د. سليمان الشطي  
د. سليمان العسكري  
د. شاكر مصطفى  
د. صديقي حطاب  
د. عبد الرزاق العدواني  
د. فاروق العمر  
د. محمد الرميحي

المراجعة :

ترجمه باسم السيد الأمين العام للمجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب

مربى ٢٣٩٩٦ الصفقة / الكرتية - 13100

العنوان الأصلي للكتاب

*Zlatica Šporer*

Uh,  
<sup>ta</sup>  
matematika!

---

*Златко Шпорер*

Ох,  
<sup>эта</sup>  
математика!

## تقديم الكتاب

عندما تصفحت هذا الكتاب لأول مرة تراءى لي أنه كتاب عادي يتحدث عن مفاهيم نظرية المجموعات، وعندما قرأت بعض فقراته وجدت أنه يختلف عن كتب الرياضيات الكلاسيكية اختلافاً كبيراً. فالمفاهيم الرياضية معروضة فيه بطريقة مبسطة، وعبارات سلسلة سهلة، وأمثلة بسيطة وقابلة للاستيعاب من قبل القراء ذوي المستويات الثقافية المختلفة. وأسلوبه الحوارى الممتع يجبر القارئ... أي قارئ على متابعة القراءة دون أن يشعر بالملل أو الإرهاق من قسوة وجذبة المادة الرياضية.

وعندما قرأت تعريف الكاتب بكتابه هذا، وسبب تسميته بهذا الاسم الغريب (أه... من الرياضيات) قررت أن أنقله إلى اللغة العربية لنفس الأسباب (انظر التعريف صفحة ١٣)، وأن أقدمه للناس - كل الناس - في وطننا العربي وخصوصاً أولئك الذين لا يحبون الرياضيات وعددهم كبير... لأنه - كما يؤكد الكاتب - مهما كان المجال الذي ندرس فيه، ومهما كان المجال الذي سنعمل فيه لابد من أن نواجه فيه هذه المفاهيم الأساسية في الرياضيات المعاصرة مثل: المجموعات والعمليات عليها، وعلاقتها بالأعداد الطبيعية والعمليات عليها، التطبيقات، المنطق الرياضي، عمليات جبر المنطق.

وأهمية الكتاب في هذه المرحلة بالذات كبيرة جداً نظراً لعملية تطوير الكتب المدرسية في الرياضيات، ودخول هذه المفاهيم الرياضية الأساسية كتبنا المدرسية. ونظراً لحاجة الناس - كل الناس - لمرجع يوضح هذه المفاهيم بأسلوب جذاب يدفعهم لمتابعة القراءة للتعرف على جميع هذه المفاهيم الجديدة في الرياضيات التي يصادفونها في مختلف الكتب المدرسية.

والكاتب - زلاتكا شبورير - هو مرب كبير يدرك نفسية الإنسان الذي يتوجه إليه بكتابه ، لذا فهو يعرض المفاهيم بأسلوب حوارى شيق ، فهو يتصور نفسه أنه يقوم بحوار مع إنسان لا يحب الرياضيات ، وعاوره بطرح عليه أسئلة حول هذه المفاهيم الجديدة التي بات يصادفها في الكتب المدرسية والتي لم يتعرف عليها خلال دراسته السابقة ، وقد تكون الأسئلة بسيطة ، وقد يتهمك ، وقد يستغرب بعض المناوين . . . والكاتب يبيه على كل تساؤلاته متجاهلاً تهكمه ومبرراً استغرابه .

وبما أننا اعتدنا أن نرمز بس لعبارة السائل وبع لعبارة المجيب ، فقد اعتمدنا هنا أيضاً نفس الاصطلاح . ولكنا نلاحظ أن الكاتب قد يسأل أحياناً للتأكد من فهم عاوره لما ذكره له من مفاهيم ، والآخر يجيب ، إذن هنا لم نعن بها دوماً سؤالاً ، وج ليست دوماً جواباً . أي أننا وضعنا أمام عبارات المحاور ، وج أمام عبارات الكاتب نفسه .

نلاحظ أيضاً أن الكاتب قد يلجأ في بعض المواقف إلى (عالم رياضيات) ، أو (مرب كبير) يحاوره في موضوع ما (لاقناع محاوره بقوانين رياضية رمزية مجردة) ، في هذه الحالة وضعنا إشارة ● أمام كلمات العالم الرياضي ووضعنا أمام كلمات الكاتب نفسه وج وقد نضع عبارات العالم الرياضي ضمن قوسين ( ) أو [ ] .

وأسلوب الكاتب شيق ومازح ، لذا فهو يتحدث مع نفسه أحياناً وليس مع محاوره ، لذا فقد وضعنا هذه العبارات التي يقولها لنفسه ، والتي لا تتطلب إجابة أو رداً من الطرف الآخر ضمن قوسين ( ) . وقد بطرح الكاتب بعض الأسئلة على محاوره ويترك له فرصة ليحجب عليها ، تاركاً أيضاً الفرصة للقارىء لكي يجيب عليها أو يحلها (إذا كانت مسائل) ، وقد لجأنا لترقيم هذه الأسئلة والمسائل بالأرقام 1، 2، 3 . . . وفي نهاية الكتاب نجد حلول وإجابات هذه الأسئلة والمسائل .

يتضمن الكتاب إضافة لتعريف الكاتب نفسه بكتابه ، مقدمة بقلم الأستاذ

أبو كورين - دكتور فلسفة في العلوم الرياضية والفيزيائية - مدير مختبر علم النفس العام والتربوي في معهد الأبحاث العلمية التابع لأكاديمية العلوم التربوية للاتحاد السوفيتي - موسكو . يعرفنا الأستاذ من خلالها بالكتاب والكتاب نفسه ، وثلاثة فصول في المفاهيم الرياضية الأساسية هي : المجموعات والعمليات عليها - الأعداد الطبيعية - وجهر المنطق . في الفصل الرابع يحدثنا الكاتب بمواضيع مختلفة حول الرياضيات ويعطينا إجابات لبعض الأسئلة الشائعة حولها مثل : هل من السهل إعطاء مسألة رياضية؟ . . . ماذا تدرس الرياضيات في وقتنا الحاضر؟ . . . أين توجد نقاط أكثر: على المستقيم أم على القطعة المستقيمة؟ . . . أمل أن أكون قد وفقت في تزويد القارئ العربي بمراجع بسيط وشيق في المفاهيم الأساسية للرياضيات المعاصرة .

### تنويه

تود هيئة تحرير سلسلة عالم المعرفة أن تنوه بالجهد الطيب الذي قام به الدكتور عادل عبدالكريم ياسين ، والمتمثل في مراجعته الفنية للمصطلحات الرياضية التي تضمنتها ترجمة هذا الكتاب لتكون قريبة الفهم من القارئ في أقطار الوطن العربي ، وكذلك ما قام به من مراجعة لحلول بعض المسائل الرياضية ، وإضافته لبعض الهوامش التوضيحية المناسبة لفائدة القارئ ، وترتيب سرد المصطلحات الرياضية بما كان لهذه الجهود أثرها الطيب في إصدار وترجمة الكتاب في صورتها التي بين يدي القارئ .





# المبتدئ المبتدئ المبتدئ المبتدئ

٥	تقديم الكتاب
٩	تعريف بالكتاب والكاتب
١٣	ما هذا الكتاب
٢٠	الفصل الأول: المجموعات
٩٤	الفصل الثاني: الأعداد الطبيعية
١٥٢	الفصل الثالث: عمليات جبر المنطق الجمل المفتوحة
١٧٤	الفصل الرابع: بضع كلمات حول الرياضيات
١٩٢	الفصل الخامس: حلول واجابات
٢٠٢	سرد أبجدي باللغة الإنجليزية لبعض المصطلحات الواردة



## مقدمة

تعريف بالكتاب والكاتب :

بقلم الاستاذ : ابو كرين•

إن هذا الكتاب الذي ألفه الرياضي والمربي البوغسلافي الشهير زلاتكا شبورير (ZLATKO SHPORER) أقرب ما يكون إلى تلك الكتب الرياضية التي تهدف إلى تكوين تصور عام ومتكامل عند القارئ، حول أهم موضوعات الرياضيات المدرسية، فالكتاب يحوي فصولا تعرض المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات والأعداد والمنطق الرياضي.

وانتقاء شبورير هذه المجموعة من المفاهيم يتوافق مع التطور الذي طرأ على مناهج الرياضيات المدرسية. فمن المعلوم أن كل الرموز والمصطلحات والبراهين في الكتب المدرسية مبنية على أساس استخدام قواعد نظرية المجموعات والمنطق الرياضي.

ونلاحظ في هذه الكتب أيضا الاستخدام الواسع لخواص التطبيقات، وتلك التطبيقات التي تعطي مختلف التوابع (الدوال) الجبرية خاصة. إضافة إلى ذلك فإن مدخل البناء الرياضي في الكتب المدرسية قد أصبح أكثر تجريدا، لذلك فهو يتطلب استيعاب طريقة المسلمات في عرض المفاهيم الرياضية الأساسية.

غير أننا لن نجد في كتاب شبورير براهين قاسية أو وصفا موسعا أو نتائج لنظريات. ذلك أن شبورير يتوخى عرض المادة المعقدة بطريقة بسيطة وعلمية، وهدفه الأساسي في ذلك إثارة اهتمام القارئ في هذه المشاكل المعروضة، ومن

---

• ابو كرين : دكتور فلسفة في العلوم الرياضية والفيزيائية، وهو مدير مختبر علم النفس العام والتربوي في معهد الأبحاث العلمية التابع لأكاديمية العلوم التربوية للاتحاد السوفيتي - موسكو.

ثم اعطاء القارىء مقدمة تصلح أن تكون أساسا لدراسة موضوعات أكثر توسعا وشمولا.

وأثناء عرض المؤلف لموضوعاته هذه يتخذ لنفسه القاعدة التالية :

« من أجل ترويج الرياضيات ليس من الضروري أن تكون مُبتدلا في عرضها، ومن أجل العرض المبسط لا توجد ضرورة لتفسير كل شىء بشكل بسيط، وأخيرا إن التدخل الجدي في الرياضيات يجب ألا يكون محلا بالضرورة».

ومع ذلك فإن هذه الطريقة المتميزة في عرض موضوعات الكتاب لا نستطيع أن نفسر السبب الذي يجعل القارىء وإن كان لا يحب الرياضيات، حين يبدأ بقراءة هذا الكتاب، لا يستطيع ولا يريد أن يتركه. وأكثر من ذلك فإن القارىء يعود من وقت لآخر إلى بعض النقاط الصعبة فيه، دون أن يشبه لنفسه، حتى يفهم كل ما كتب فيه. وإذا أردنا تفسيراً لهذا التصرف فلن نجد تفسيراً أفضل من أن نقول: إن المهارة التربوية التي يتمتع بها شبورير هي وراء تصرف هذا القارىء بهذا الشكل.

وعندما يتحدثنا شبورير عن بعض النظريات الرياضية، فإنه لا ينسى أن يتحدثنا أيضاً عن واصفيها سواء أكانوا من العلماء القدامى أم من المعاصرين، مشيراً بذلك - وبشكل واضح - إلى صفاتهم الإنسانية المتميزة والمثيرة للإعجاب والتي كانت سبباً في نجاحهم وإبداعهم، تلك الصفات مثل: المثابرة والحكمة والقدرة على الخلق والولع بالإبداع وفي نفس الوقت، يشير الكاتب إلى أنهم أناس عاديون قد يخطئون، وربما لا يتمكنون من إيجاد حلول تامة أو براهين لكل ما يطرحونه من قضايا ونظريات. ولهذا السبب بالذات فإن القارىء يشعر بنوع من التواصل الروحي مع إبداع هؤلاء العظماء من العلماء.

ترى كيف استطاع شبورير تحقيق القيادة التربوية الضرورية للطالب والقارىء معا في كتابه؟

ولسوف يجد الطالب أثناء قراءته هذا الكتاب معلومات مطروحة بشكل رياضي مجرد في بعض القضايا الصعبة، لكنه لن يجد فيها شرحاً رياضياً جافاً

وَمَمَصِلًا ، أَوْ تَقْدِيمَ خَافِي قَالَتِ مَجْرَد حَاضِرٌ . ثُمَّ إِنَّ الْكَاتِبَ لَا يَسَى أَتَاءَ دَلَّتْ أَنَّ  
يُرْفَعُ عَنِ الْقَارِيءِ سَعَصُ الْكَاتِ الْمَارِعِ ، أَوْ الْحِكَاةُ الَّتِي تَحْمِلُ عَمْرَةً أَوْ حِكْمَةً  
مَعِيهِ

إِصَافَةً لَدَلَّتْ فَإِنَّ الْكَاتِبَ قَدْ قَسَمَ مَوَادَّ كِتَابِهِ - بِشَكْلِ حَيْدٍ - إِلَى مَقَاطِعَ  
مُنَاسِوَةٍ - تَقْرِيْبًا - فِي الْجُهْدِ الَّذِي يَحْتَاجُ بِذَلِكَ مِنْ أَحْلَى اسْتِيعَاثِهَا ، وَفِي سَهَابَةِ كُلِّ  
مَقْطَعٍ قَدْ يُقْتَرَحُ الْكَاتِبُ عَلَى الْقَارِيءِ أَنْ يَرْتَاحَ قَلِيلًا ، أَوْ أَنْ يَذْهَبَ وَيَلْعَبَ قَلِيلًا  
بِكُرَةِ الْقَدَمِ مِثْلًا

وَلَكِنْ مَهَارَةُ سُورِيرِ التَّرْبِيَةِ لَا تَكْمُلُ فِي هَذِهِ الْوَسَائِلِ التَّرْبِيَةِ الْعَامَّةِ فَقَطْ  
لَاَنَّ سُورِيرَ مَدْرَسِ رِيَاضِيَّاتٍ قُلَّ كُلُّ شَيْءٍ . . . تِلْكَ الرِّيَاضِيَّاتُ الَّتِي عَرَفْنَاهَا  
الرِّيَاضِيَّاتِ الْأَلْمَانِيَّةِ الشَّهِيرَةِ جُلَيْبِرْتِ بِمَاجِلِي  
« الرِّيَاضِيَّاتُ لَعِبَةٌ يَلْعَبُهَا وَفِي قَوَاعِدِهَا مَسْبُطَةٌ مُسْتَحْدِمِينَ لِذَلِكَ دُمُورًا  
وَمُصْطَلَحَاتٍ لَيْسَ لَهَا بَعْدَ ذَلِكَ أَيُّ أَهْمِيَّةٍ » .

وَيُؤَكِّدُ الْكَاتِبُ أَتَاءً ذَلِكَ عَلَى أَنَّ «لَعِبَةَ الرِّيَاضِيَّاتِ» وَاحِدَةٌ مِنْ أَهَمِّ  
الْمَوْصُوعَاتِ الَّتِي تَحْتَاجُ دِرَاسَتَهَا . ذَلِكَ أَنَّ الرِّيَاضِيَّاتِ بِنَاءً وَلَعِبَةً لَوْصَفَ الطَّبِيعَةِ  
الْمُحِيطَةِ بِهَا ، اسْتِنَادًا لِذَلِكَ فَإِنَّمَا فِي دِرَاسَتِهَا لِلرِّيَاضِيَّاتِ - كَمَا فِي دِرَاسَتِهَا لِللُّغَةِ - لَا يَدُ  
مِنْ إِدْحَالِ بَعْضِ الرُّمُورِ وَالْمُصْطَلَحَاتِ (الَّتِي تُعْتَبَرُ أَسْجُدِيَّةِ الرِّيَاضِيَّاتِ) ، وَكَذَلِكَ  
إِدْحَالِ بَعْضِ الْقَوَاعِدِ لِبِنَاءِ الْقَصَائِدِ (الْعَارَاتِ) الرِّيَاضِيَّةِ (وَالَّتِي تُقَابَلُ الْحَمَلُ  
بِالنِّسْبَةِ لِللُّغَةِ) . . .

وَيَمْتَلِكُ سُورِيرُ بَرَاةٍ فَائِقَةٍ فِي تَفْسِيرِ تِلْكَ الرُّمُورِ وَالْمُصْطَلَحَاتِ وَكُلِّ الْخُذُولِ  
الَّتِي يُوْرِدُهَا فِي كِتَابِهِ . إِصَافَةً لِذَلِكَ فَهُوَ يَسْتَحْدِمُ لَعِبَةَ الْمَحَادَثَةِ الْحَيَّةِ وَيُعْرَضُ عِدَّةً  
كَبِيرًا مِنَ الْأَمْثَلَةِ (الَّتِي قَدْ تَمَدَّدَتْ وَمُحَرَّدَةٌ) حَتَّى يَسْتَطِيعَ أَنْ يَتَوَصَّلَ إِلَى الْمَفْهُومِ  
الْأَسَاسِيِّ الَّذِي يَرِيدُهُ . وَهَذِهِ الْمَفَاهِيمُ الْأَسَاسِيَّةُ الصَّرُورِيَّةُ لِلطَّالِبِ تُشْتَبِهُ بِبَعْضِ  
الْعَدَدِ الْكَبِيرِ مِنْ عَمَلِيَّاتِ الرِّبْطِ وَالتَّشَابُهِ وَالتَّجْمِيعِ لِلْمَعْلُومَاتِ مَسْقُوعَةً فِي  
الْكِتَابِ .

يُرِيدُ أَنْ يُشِيرَ أَيْضًا إِلَى إِحْدَى مِيرَاتِ الْكِتَابِ التَّرْبِيَةِ الْهَامَّةِ أَلَا وَهِيَ كَيْفِيَّةُ بِنَاءِ

المادة التعليمية فيه ، وكيف نجح شبورير في تحقيق متطلبات الطفل العلمية ، من حيث مسه ومدى إدراكه ، من حيث الأشكال المناسبة للروابط المنطقية للمفاهيم الرياضية التي يتناولها في كتابه .

إن التكرارات الكثيرة - التي سوف نلحظها في الكتاب - والعودة إلى نظريات سفت دراستها أو إضافة شيء ما إلى هذه النظريات لا يعد نقصا في الكتاب ، إنما يعد واحدا من أهم محاسنه ، ذلك أن استيعاب بعض الفصايا والمفاهيم بالشكل المطلوب لا يمكن أن يتم إلا باستخدام مثل هذا الأسلوب في الدراسة

وهذا الشكل ، فإن أولئك الذين وضع الكتاب من أجلهم سوف يقرؤونه باستمتاع ويستفيدون منه في دراستهم ، وفي نفس الوقت سوف يساعد هذا الكتاب المربين في مهم كيمي بناء العملية التعليمية لمادة الرياضيات

ومن الواضح أخيرا أن كتاب شبورير يمكن قراءته بشكل ممنع بفصل مراعاة مؤلفه المعانقة في استخدام التماير الببطة المناسبة والواضحة .



إلى أولئك الذين لا يحبون الرياضيات . .

ما هذا الكتاب ؟؟

- تعريف بالكتاب :

ما إن تقرأ عنوان الكتاب حتى تتساءل ما هذا الكتاب؟

ثم تصيف :

س - لماذا كان هذا العنوان الغريب للكتاب؟ فالعنوان عبارة مقننة غير مألوفة بين صاوين الكتب.

ج - أؤكد لك أنني لم ابتكر عنوان هذا الكتاب لقد أوحيت أنت لي به في شكواك التي لا تنتهي من الرياضيات وهالدا أكتب هذا الكتاب تحت هذا العنوان.

س - أنا أوحيت لك بهذا العنوان ؟

ج - نعم أنت - أنتم جميعا الذين لا تحبون الرياضيات، وأنتم لستم بالقليلين منكم الشباب والمحاضرين، الأطفال والكبار، التلاميذ والطلاب . . باختصار لا يمكنني أن أحصيكم جميعا.

بالماسبة ليس من الصعب التوصل إلى عدد هؤلاء الناس

س - وكيف سنطيق التوصل إلى عددهم؟

ج - الأمر في منتهى البساطة ، سوف أحصي على أصابعي أولئك الذين يحبون الرياضيات ثم أطرحهم من مجموع سكان العالم، فأحصل على عدد أولئك الذين لا يحبون الرياضيات.

هذه عملية بسيطة جدا أليس كذلك؟

س - بلى . ما قلته صحيح تماما. أنا لا أحب الرياضيات وكل من حولي لا يحبوها أيضا هل تعتقد أنا بعد أن نعرف على كتابك سوف نجد أنفسنا مرعمين على حبها؟ اعتقد أن هذا ما ينبغي (فأنا لم أفكر بعد أبدأ بدراسة هذا الكتاب أم لا؟).

ج - لا أحرز حتى على التفكير بأنه بعد لحظة واحدة من تعرفك على كتابي سوف يصطرم في نفسك حب الرياضيات - فأنا لست على هذه الدرجة من السذاجة - وإذا صدف وابتكر شخص ما وسيلة «لا جبارك» على حب الرياضيات فإن الرياضيين سوف يقيمون له في حياته تمثالا، وسوف يسعون لإعطائه جائزة نوبل (١)، وهذا الشخص سوف يصح مشهورا في كل أنحاء العالم... انتظر قليلا: ما الجائزة التي قلناها؟ جائزة نوبل؟

عفوك لقد أخطأت في الكلام: ليس جائزة نوبل وإنما جائزة فيلدس، وذلك أن جائزة نوبل لا تمنح للعاملين في مجال الأبحاث الرياضية - يبدو أن نوبل مثلك لم يحب الرياضيات، ولذلك لم يسمح بأن تمنح من محصاته جائزة للرياضيين.

س - ولكي لم اسمع شيئا مسبقا عن جائزة فيلدس، ومن هو فيلدس؟

ج - فيلدس هو مليونير أمريكي صاغر بعض الشيء - لقد علم أن نوبل قد حرم الرياضيين من إمكانية الحصول على جائزته فقرّر (بسبب شذوده على ما يبدو) تخصيص مبلغ معين من المال لكي يمنح كجائزة مرة كل أربع سنوات لمن يسهم في تطوير علم الرياضيات، ويمنح الرياضي إصافة للجائزة النقدية ميدالية تحمل اسم فيلدس مؤسس هذه الجائزة. والرياضيون يدون احتراماً خاصاً هذه الميدالية ويعدون شرف الحصول عليها جائزة كبرى، ويقومونها على أنها اعتراف عالمي بجهودهم العلمية - هذا كل ما أعرفه عن هذه الجائزة.

س - حسنا ولكن لماذا حصصت الكتاب لمن لا يحب الرياضيات؟! وإذا كان الإهداء مجرد مكنة فكيف لا نحجل من الضحك على هذه المصيبة التي ابتليتنا بها؟

---

(١) منذ عام (١٩٠١) وفي ١٠/١٢ - يوم مات نوبل - من كل عام تمنح جائزة نوبل لأحد العلماء لتوصله إلى اكتشافات مهمة أو وضعه لنظريات هامة وحديثة في مجال «التجريب» - الكيمياء - الطب - الأدب - ومن ضمن المحصنات تصرف جائزة للعاملين من أجل تدعيم السلام العالمي

ج - لا الإهداء ليس نكتة أنا أكتب الكتاب لك ، وقد قصدت ذلك بكل  
حذية . فإلكتاب مكنوب بحق لك ومهدى إليك . والسبب الرئيس لكتابة  
هذا الكتاب وهذا الإهداء هو أنك مضطر لدراسة الرياضيات رغم أنك لا  
تحبها ، فليس هناك أي صف في المدرسة - وحتى معظم فروع الجامعة -  
يمكنك أن تمر به دون استخدام الرياضيات . إذن عليك أن تتعامل مع  
الرياضيات - إذا رغبت - تماما كما تتعامل مع شر لا بد منه ، والذي لا يمكن  
التخلص منه في وقتنا الحاضر في المدرسة خاصة وكل شر لا بد منه يجب أن  
ندرسه . وهذا مبدأ رائع يجب أن يكون رائدنا حتى في الحرب فسننكره  
العدو ونحاربه كما يتعين علينا في الوقت نفسه أن ندرسه بأفصل شكل ممكن  
لكي نتمكن من الانتصار عليه .

ولنأخذ مثالا آخر من الرياضة :

كيف يبدأ المدرب تدريب فريقه في كرة القدم تمهيدا لخص الجولة الأخيرة ؟  
يبدأ بتعريف أعضاء الفريق على خصائص لعبة الفريق الماس . لماذا يفعل  
ذلك ؟

اعتقد أنك تدرك السبب . هذا ما أردت أن أبدا به تعريفني لهذه المحادثة حول  
الرياضيات وليس أكثر .

س - وهل نعرفنا على كتابك هذا يحمل لنا أي فائدة ؟ أم سيكون ذلك مصبغة  
للوقت ؟ خصوصا وأننا مرهفون بأعباء وطائف بيئية كثيرة .

ج - أقول لك بصراحة إنني لا أعرف إلى أي مدى يحمل لك كتابي الفائدة ، وأنا لا  
أستطيع أن أعطيك أي وعد فهذا عائد إليك بالدرجة الأولى وعلى كل حال  
يمكنك أن تنصفحه في أوقات الفراغ فسوف يسليك وتتعلم منه بعض  
الشيء .

س - يسليني ؟ منذ متى أصبحت الرياضيات تسلية ؟

ج - هل تعلم أن لديك شكوكا لا حدود لها في كل شيء . لقد قلت لك إننا لن  
نعرفها على الرياضيات ، وإنما سوف نتحدث فقط حول الرياضيات



لأنها تحوى في داخلها أشياء كثيرة ممتعة ومسلية. ثم إني لن أعزرك بالرياضيات بذلك الشكل الذي يقوم به عادة الزوج العالم لروحته، أي التعريف على مجموعة براهين بلغة رياضية علمية قاسية وجديدة. سوف أتحدث إليك ببساطة بدون قسوة رياضية وبدون براهين، وإذا تذكرت أثناء ذلك قصة ممتعة فسوف أرويها لك بالتأكيد. وعليك بدورك أن تنظر إلى الرياضيات من جانبها المسل، ولا تأخذها بهذه الجدبة القاسية، وكن واثقا أننا نستطيع أن نشرب من أي شيء - تقريبا - بالكثرة، ونستطيع أن نتعرف على أي مفهوم (مهما كان مجردا) بأسلوب مريح، وهذا ما سنفعله معا. وليقلق أولئك الذين تعودوا أن ينظروا إلى كل شيء في الحياة وفي الرياضيات بجدية لا متناهية.

تذكرت الآن أحد التعاريف المضحكة بعض الشيء، والذي سمعته لأول مرة في المدرسة منذ زمن بعيد وسوف أخبرك به :  
سأل المدرس الطالب : ما المعين ؟  
فكر الطالب طويلا . . وأخيرا أجاب بنبرة عالية :  
المعين هو مربع أهوج .

لقد مضى وقت طويل مد سمعت هذا «التعريف» ولقد نسبت الكثير من التعاريف الرياضية «الصحيحة» والنظريات، ولكي سوف أطل أذكر هذا التعريف إلى الأبد.

وأعترف لك أنني وإلى الآن أقدر النكتة الجيدة تماما كما أقدر التعريف الصحيح. أرجوك ألا تطلع الرياضيين على هذا الكتاب وهذا أفصل لي وذلك، ولا تسألني عن السبب لأنك عندما تقرأ الكتاب سوف تفهم السبب وحدك.

س - حسنا . . . الكتاب لن أريه أحدا . ولكي أنساءل حول أي شيء هو ؟  
ج - حول كل شيء تقريبا : حول رياضيي القرون القديمة والمشاكل التي عانوا

منها حول الأعداد الطبيعية وخواصها وقوانينها - حول الأحجار المثيرة في عالم  
اللاهيات - حول المسلمات الرياضية - حول المجموعات واضطراب الآراء  
والجدل حولها - حول الرموز والمصطلحات الرياضية غير العادية - حول  
الرياضيات المعاصرة المعتمدة في الكتب المدرسية - حول الأقسام المختلفة  
للرياضيات وما ظهر بين الرياضيين من سوء الفهم بها . معارة  
أخرى : الكتاب يتحدث حول أشياء كثيرة مختلفة .

ولكي نجد المصطلح أو العبارة أو المفهوم الذي يهمك يكفي أن نتصفح  
الكتاب - دون أن نقرأ كله بالضرورة - وتأخذ العنوان الصغير للموضوع أو  
القضية أو الطريقة أو المفهوم الذي يهمك . ومن المهم جدا أن تتمكن من  
إيجاد ما تريده بسهولة .

س - هذه فكرة لا بأس بها ومن الممكن أن أستخدمها . ومع ذلك فلماذا كان  
كتابك كبيرا بهذا الشكل ؟ أليس من الأفضل لو أخرجته بحجم أصغر  
وصفحات أقل فلو كان أصغر لكان من الأسهل أن أقرره قراءته .

ج - حقا - إنك لشخص تبحث عن العيوب - ينبغي عدم إصدار حكم على  
الكتب أو على الناس استنادا إلى أشكالك الخارجية ، بل من الأفضل أن  
تتعرف أولا على محتواهم .

ألم نلتق في حياتك بشخص بدين ولكنه لطيف ، أو بشخص نحيل ولكنه ممل ؟  
وكذلك الكتب . وليس أسوأ - بالطبع - من كتاب بحجم كبير وممل . ومع  
ذلك فإن بدا لك كتاب كبير الحجم بشكل غير معقول تستطيع أن تبدأ  
بالقراءة من منتصفه ، أو من نهايته ، أو من أي مقطع ترغب فيه (بالمناسبة  
أنت لا تدري كم من الكتب قد قرأتها أما بهذه الطريقة)

س - وهل أستطيع أن أفهم إذا قرأت بهذا الشكل دون أن أنظر إلى بداية  
الكتاب ؟

ج - نعم سوف تفهم كل شيء ولم لا ؟ هذا الكتاب ليس رواية وليس كتابا

مدرسيا عليك فقط ألا تبدأ القراءة من منتصف المقطع وإذا بدأت  
القراءة من منتصف الكتاب تستطيع في أي وقت نشاء أن تعود إلى بدايته  
لنقرأ ماتركته

هل لديك أسئلة أخرى حول الكتاب؟ وهل لديك أشياء يهمك أن نعرفها  
أيضا قبل البدء بالقراءة؟

س - لم بعد لدى أي سؤال إلا أنه قبل أن يبدأ المحادثة اسمح لي أن أطرح  
عليك آخر سؤال وهو سؤال صغير مما الرياضيات؟ هل تستطيع أن تُعرف  
لي الرياضيات؟

ح - آه . . لقد صغفني ياأخي بهذا السؤال الذي لم أكن أتوقعه أبدا، ومع ذلك  
فسوف أحاول أن أجيبك عليه وعم أنني لست متأكدا فيها إذا كانت إحافني  
مثال رضاك.

لتعريف الرياضيات يمكننا أن نعود إلى مقولات عظماء الرياضيين هذه  
المقولات كثيرة لا يمكن حصرها جميعها لذا سوف أستخدم تلك المقولة  
التي تروق لي فقط. ومن الممكن أن ندو لك بعض المقولات غير عادية  
بعض الشيء ولكن عليك ألا تأخذها بحرفيتها.

عليك أن تتق بأن الرياضيين يعرفون مايقولون

● يمكن تعريف الرياضيات بأنها المادة التي يصعب دوما أن يعرف الشيء،  
الذي بدور الحديث حوله، ويصعب معرفة ماإذا كان ما نقوله صحيحا أو  
غير صحيح

برفراقد راسل

● الرياضيات لعبة لها وفق قواعد بسيطة مستخدمين لذلك رموزا  
ومصطلحات ليس لها - محد داتها - أي أهمية خاصة.

جسبرت

● الرياضيات هي علم الالهايات.

وبل

● الرياضيات هي المادة التي تحصل عالما فيها على علامة الصفر!

طالب مجهول



## الممثل الأول

## المجموعات

كل شخص يعرف بنفسه ما المقصود بالمجموعة  
مبوريل

- كثافة المجموعة.
- انتهاء عنصر إلى مجموعة وتميزه.
- تمثيل المجموعات بالرسوم (المحطات).
- المجموعات المتساوية - مصدر سوء الفهم!
- المجموعة المحتواة في مجموعة أخرى، أو المجموعة الجزئية
- كيف تشكل مجموعات جديدة انطلاقاً من مجموعات معروفة؟
- (تقاطع واجتماع المجموعات ومنممة مجموعة)
- التطبيق أو «التوصيل» أو «تصوير المجموعات»
- (الحاصل) (١) الديكارتي للمجموعات.
- المجموعات والأعداد.
- العلاقة بين العمليات على المجموعات والعمليات على الأعداد
- المجموعة المرتبة والمجموعة المرتبة جيداً.

س - لأي شيء تحولت الرياضيات في وقتنا الحاضر؟ الجميع يدرسون هذه المجموعات. وأبنا نوجهت نجد مجموعات فمن هذا الذي انتكراها؟ لقد أوجدنا ليرحق الطلاب بها فقط أنا أيضاً درست في المدرسة سابقاً وأهبتها بشكل مقبول، لقد عشنا هدوء بدون المجموعات، ونصرف الآن حياتنا بشكل جيد بدونها. أما الآن؟

مدد من قريب توجه إلى طفل يطلب مني مساعدته في سوء اجتماع أو تجمعات

(١) نعمل كلمة حاصل في أكثر البلدان العربية ونعطيها كلمة أخذ، في بعض الأنصار

للمجموعات. أخبرني من فصلك ما فائدة هذه المجموعات وهذه العمليات  
ج - نف. كفى. . . . واحداً قليلاً برك.

كيف تهاجمي هذا الشكل العيب وكأني أنا الذي أوجد هذه المجموعات  
أصدقك القول إن نظرية المجموعات، ليست من ابتكاري، ولست أنا  
من أدخلها في المناهج المدرسي. حق أنا مستعد لتتبرع بأنه يستحيل أن  
تصور تعليماً للرياضيات بدون نظرية المجموعات رغم أن الرياضيين  
مستعدون للاعتراف - كفقد ذاتي - بأنهم قليلو ما اهتموا بالمجموعات

و

س - نعم . هذا ما اعتقده أنا أيضاً، فقد تكون هذه المجموعات ضرورية  
ولكن من الصعب أن يصدق أنه بدون المجموعات لا يمكن أن نجمع  
عددين مطلقين، إن  $2 + 3 = 5$  معروف حتى لأولئك الذين لم يدرسوا  
المجموعات

ج - ولكن المجموعات لم تدخل الرياضيات من أجل جمع الأعداد. فهي ضرورية  
لاعتبارات ومجالات أخرى فالمجموعات قد ظهرت في الرياضيات  
مد.

س - مد خمس أو ست سنوات مضت أليس كذلك؟؟

ج - ليس خمس أو ست سنوات مضت وإنما مد مئة عام

س - مد مئة عام؟ من غير المعقول أن يكون عمر المجموعات مائة عام

ج - نعم نعم إن الرياضيين يؤكدون أن نظرية المجموعات ظهرت إلى  
الوجود في ٧/١٢/١٨٧٣م أي مد أكثر من مائة عام

س - ومن الذي ابتكرها؟

ج - لقد ابتكرها أحد الفلاسفة الرياضيين واسمه كانتور<sup>(٢)</sup>

(٢) كانتور (جورج) Cantor G (١٨٤٥ - ١٩١٨) رياضي ولد في روسيا ودرس في ألمانيا  
وأصبح أستاذاً في جامعة Halle في عام (١٨٧٢ - ١٩١٣) معروف بأنه مؤسس لنظرية  
المجموعات

س - إذن هذا الرياضي قد مات<sup>١</sup>

ح - طعا لقد ولد كاسور في عام / ١٨٥٤م / ومات عام / ١٩١٨م / أي في نفس العام الذي انتهت فيه الحرب العالمية الأولى.

س - وما الذي دعا كاسور لإدخال المجموعات في الرياضيات<sup>٢</sup>

ح - من المحتمل أن يكون مرة ذلك إلى توحه كاسور نفسه نحو الملصق ودراسه للاستبيات بصورة خاصة أمر مذهش اليس كذلك؟؟ تصور مثلاً أنه اهتم بالسؤال التالي أي الأعداد أكثر الأعداد الطبيعية أو الأعداد الحقيقية؟

لقد كتب كاسور في إحدى رسائله إلى أحد أصدقائه - هذا الصديق هو ديديكند<sup>(٣)</sup> - على ما اعتقد - أنه قد تمكن من الرهان على أن الأعداد الحقيقية أكثر من الأعداد الطبيعية بواسطة المجموعات

(هل ترى معي هذه العرائب التي يهتمون بها في رسائلهم بدلاً من أن يصمموا رسائلهم تحيات وسلامات وسؤال عن صحة الروحة والاولاد؟؟) إن تاريخ هذه الرسالة هو ٧/١٢/١٨٧٣م وقد اعترضه الرياضيون يوم مولد نظرية المجموعات ( وسوف يدزون قريباً بالاحتمال به كعيد كبير ) هذه هي ندابة نظرية المجموعات.

س - ولماذا يعطى الرياضيون مثل هذه الأهمية للمجموعات؟

الا يمكن حقاً أن يدرس الرياضيات بدونها في وقتنا الحاضر<sup>٤</sup>

ح - بالتأكيد لا يمكن أن يدرس الرياضيات بدونها، وبما كان الرياضيين إعطاء مختلف التعليقات لهذه الموضوع، فهم يؤكدون مثلاً - أنه بفضل المجموعات أصبحت لغة الرياضيات أكثر بساطة وبناء ووضوحاً، وأصبحت الصياعات الرياضية أكثر دقة وباستخدام المجموعات يمكن ببساطة واحدة أن نلم بأصعب بناء رياضي.

ولقد برهن العلماء على أن المجموعات موحودة في أساس الرياضيات

(٣) ر ديديكند Dedekind R (١٨٣١ - ١٩١٦م) رياضي ألماني



المعاصرة، وإن المجموعات يمكن استخدامها في كل مكان، وأنها مفيدة لدرجة أنه يمكن أن يدرس بها مختلف اللانهايات، وأن

س - هل صحيح أن المجموعات شاملة إلى هذه الدرجة؟

ج - نعم . . . إذا أخذنا العناصر الأساسية في الرياضيات مثل العدد والنقطة، فإننا نجد أن الرياضيات المعاصرة تدرس تجمعاتها المختلفة (وتدرس بصورة عامة تجمعاتها اللانهائية)

وهناك أيضا مجموعة الأشعة المتجهات . . . ومجموعة التوابع ، وحتى مجموعة الخواص ومجموعة النوى . . . وأشياء أخرى كثيرة

س - ومع ذلك فما المجموعة؟ وهل يمكن أن نمرعها بمفاهيم أكثر بساطة؟

ج - كلا . . . فالمجموعة مفهوم بسيط لدرجة أننا نستخدمه في حياتنا اليومية، ونستخدمه في الرياضيات لأنه لا يمكن تحويله إلى مفهوم أبسط وبالماسة أنت تقول في حديثك العادي ' مجموعة المدن، مجموعة الدول، مجموعة الأعداد، مجموعة الطلاب، مجموعة السيارات . . . . . حتى، أن كانتور نفسه قال إن المجموعة تعني تجمعا في وحدة تامة لأشياء مختلفة تصورها أو نمكرها . وعلماء آخرون قالوا ما يشبه هذا القول عن المجموعة (مثل موريل).

س - إذن المجموعة يمكن أن تكون مجموعة بطرق مختلفة . هل يمكن أن نأخذ بعض الأمثلة عن المجموعة؟

ج - طبعا يمكن أن نأخذ الكثير من الأمثلة عن المجموعة ولكن الرياضيات تأخذ بعين الاعتبار فقط تلك المجموعات التي تتمتع بصفات محددة بدقة، والتي تتألف من عناصر أو أعداد تجمع فيما بينها صفة عامة أي باحتصار الرياضيات تهتم بالمجموعات الرياضية.

س - لم أفهم تماما ماذا تعني بذلك؟

ج - سأحاول أن أفسر لك باستخدام الأمثلة . يمكن القول مثلا إن الأشياء .

حرارة، سيارة، كوكب الزهرة، بقعة، والأشياء مساحة، وقلم وكرة ووردة  
تؤلف مجموعتين كل مجموعة منها مؤلفة من أربعة عناصر ولكن ملاحظ أنه لا  
يوجد صفة عامة تشمل العناصر الأربعة في كل منها ومثل هذه المجموعات  
لا تشكل أهمية بالنسبة للرياضيات ولا يدرسها، وإن كنا نورد مثل هذه  
المجموعات كأمثلة فقط على المجموعات إن الصفة العامة التي تميز عناصر  
المجموعة يجب أن تكون بذلك الشكل الذي يجعلنا نؤكد بثقة على ما إذا كان  
عصراً ما ينتمي له أو لا ينتمي بحاصة الحدود أي على ما إذا كان هذا  
العصر ينتمي لهذه المجموعة أو لا ينتمي إليها ويقال أيضاً إن المجموعة  
يجب أن تكون معطاة بشكل جيد أو صحيح

س - لقد فهمت ، إذن مجموعة المدن هي  $xx$  مجموعة معطاة بشكل جيد!

ج - احشئ أن يكون هذا المثال عبر واضح

س - ولماذا ؟ هذه مجموعة واضحة تماماً ومجموعة المدن.

ج - كلا إنها ليست واضحة تماماً وذلك لأسباب عديدة عليّ أن تتفق أولاً ماذا  
يعني بكلمة مدينة؟ هل هي مركز تجمع سكانٍ يحوي عدداً معيناً من السكان  
أم أنه شيء آخر؟ وهل يعني هذا في هذا المثال مدن دولة واحدة أم مدن قارة  
أم مدن كل العالم أم . . . . .

س - وكيف إذن نعطي المجموعة بشكل صحيح؟

ج - يجب أن نعطي المجموعة بشكل أكثر دقة مثلاً

مجموعة عواصم الدول العربية ، مجموعة مدن الجمهورية العربية السورية التي  
يريد سكانها عن  $200$  / ألف نسمة ، مجموعة مدن العالم التي يريد عدد  
سكانها عن  $3$  / ملايين نسمة ، أو مجموعة الأعداد الطبيعية ، مجموعة  
الأعداد التي تقل القيمة على  $5$  / ، مجموعة طلاب الصف الثالث (في  
مدرسة ما) ، مجموعة أيام الأسبوع . . . مجموعة الطلاب الممتازين في صفك  
علماً بأن الطالب يكون ممتازاً إذا كان معدله أعلى من  $90$  /

س - ها ها ها في صفّي لا يوجد أي طالب ممتاز.

ج - غير مهم في هذه الحالة سوف نقول إن مجموعة الطلاب המתأخرين هي مجموعة  
خيالية

من - وكيف تكون خيالية؟

ح - بكل بساطة حالة أي لا يوجد فيها أي عنصر ولكن دعني الآن أفسر  
لك الأمر بشكل أكثر وضوحاً إذا لم يكن لديك مانع بلزمك فقط أن تتحلل  
بالصبر، طالما أنه لا بد لنا من التعرف على بعض المفاهيم الأساسية في  
المجموعات.

### كتابة المجموعة :

هناك طريقتان لكتابة المجموعة، ولكل طريقة بعض المحاسن وكذلك لها  
بعض المساوئ. لتعرف على هاتين الطريقتين.

طريقة القائمة وهي أبسط الطرق لكتابة المجموعة، حيث يكتب جميع عناصر  
المجموعة (أو قائمة بعناصر المجموعة)، ثم يحصرها ضمن قوسين كبيرين على  
أن يفصل بين كل عنصرين منها فاصلة مثلاً

{ نيل، عبد الرحمن، جورج، مرعي }

{ ٣، ٤، ٥ } { ٩ } { ا، ب، ج، د } .

ومحاسن هذه الطريقة في كتابة المجموعة تتلخص في أساليء شك في أن عناصرها  
ما ينتمي (أو موجود) في هذه المجموعة أو لا ينتمي، طالما أن هذا الاشياء واضح  
من استعراض عناصر المجموعة المكتوبة أمامنا، ولكي اعتقد أنك قد لاحظت  
معني مساوي، هذه الطريقة في كتابة المجموعة

فهذه الطريقة - كما نرى - ليست مريحة من أجل التعبير عن مجموعة تحوي عدداً  
كبيراً من العناصر مثلاً 'مجموعة طلاب مدرستك أو مجموعة الحركات في لعبة  
الجمبار' اعتقد أنها ستكون تسلية مناسبة لك تماماً لو طلب إليك أن تكتب جميع  
عناصر هاتين المجموعتين! أصعب لذلك أنه توجد مجموعات تحوي مبيدات  
إنسان، أو مجموعة عدد عناصرها غير متناهية (مجموعة الأعداد الطبيعية مثلاً).

إسأ - وللأسف - لا نستطيع أن نكتب مثل هذه المجموعات بطريقة القائمة معها حاولنا ذلك وبماسة ذكرنا للمجموعات التي عدد عناصرها غير منتهية أود أن أشير إلى بداية ظهور نظرية المجموعات لقد ظهرت هذه النظرية أثناء دراسة صفات «المجموعات الكبيرة» أي المجموعات التي لها عدد كبير من العناصر «والتي تصم - بالطبع العدد لا نهاية» ولما كل الحق أن يؤكد على أنه لولا هذه المجموعات الكبيرة «وما ارتبط بها من مشاكل» لما ظهرت نظرية المجموعات

ولكتابة هذه المجموعات الكبيرة ابتكر الرياضيون طريقة أقصر لكتابة المجموعة وهذه الطريقة الحديثة ليس لها علاقة بعدد عناصر المجموعة لقد ناقشوا الموقف - تقريبا - بالشكل التالي :

« من الأفضل ، في هذه الحالة ، أن نثبت فقط الصفة المميزة التي تمنعها عناصر المجموعة . وكل الأشياء التي تمنع هذه الصفة المميزة سوف تكون عناصر في المجموعة ، وتلك التي لا تمنع هذه الصفة المميزة لا يمكن أن تكون عناصر في هذه المجموعة .»

ولقد سميت هذه الطريقة لكتابة المجموعة بطريقة القاعدة (أو القانون أو الصفة المميزة) أنا لا أحرف بالوسط من هو الرياضي الذي ابتكر هذه الطريقة ، ولكنني متأكد من أن هذا الرياضي لا يحب الكتابة كثيرا ، إنما يفضل الاختصار في التعبير عن المفاهيم . ولقد أعجبت هذه الفكرة رياضيا آخر ووافق عليها «هي طريقة ليست سيئة» ، وهكذا استخدمها الرياضيون للتعبير عن الكثير من المجموعات . لفرمثالا هلي ذلك :

إن مجموعة الأعداد الطبيعية نكتب بطريقة القائمة كما يلي

$$\{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

أما بطريقة القاعدة فنكتبها :

{  $n$  التي تحقق الخاصية :  $n$  هو عدد طبيعي }

• هناك اتفاق بين الرياضيين على الاستعانة بفاصل ثلاث نقط لتميز الح. رياضيا (المحرر)

والرياضي لا يهتم بوعية  $s$  هنا ، المهم فقط أن يحقق الصفة المذكورة وهي أنها عدد طبيعي وذلك أن  $s$  هنا هو عدد طبيعي ، وفي مثال آخر سوف يكون  $s$  طالبا من طلاب الصف ، أو إحدى حركات الخصار ، أو عرقة حذاء لأحد طلاب الصف ! ... لا نظن أي ألقى عليك بكتة

فالرياضي يكتب مجموعة العرقات اليسرى لأحدية طلاب الصف الخامس مثلاً كمايلي : (  $s$  التي تتمتع بالخاصة .  $s$  هي العرقة اليسرى لحذاء طالب في الصف الخامس )

وفي مثال خامس قد تكون  $s$  إحدى الكوالب السيارة .

وفي مثال سادس قد تكون  $s$  عاصمة إحدى الدول .

وفي مثال سابع قد تكون  $s$  عددا صحيحا .

إذن  $s$  يمكن أن تمثل أي شيء .

ولكن هذه الطريقة في كتابة المجموعة بدت للرياضيين طويلة أيضا لقد اصطدّموا بالعارة « التي تحقق الخاصة » ، أو « التي تتمتع بالخاصة » ، والتي يكتبونها في كل مجموعة ففروا احتراها . وهكذا وبجهود مشتركة فيها بينهم أوجدوا الرمز ١٠ بدل هذه العارة ورأى بعض الرياضيين امكانية تبسيطه أيضا إلى الشكل « » لذلك فانه وفي جميع كتب الرياضيات نجد نفس الرمز الذي يحمل نفس المعنى :

/ ( وقرأ : التي تتمتع بالخاصة ) أو « حيث اختصارا »

: ( وقرأ : التي تتمتع بالخاصة ) .

مجموعة الأعداد الزوجية الأصغر من ١٠٠ نكتب بالشكل .

{  $s$  /  $s$  - عدد زوجي أصغر من ١٠٠ } أو

{  $s$  :  $s$  - عدد زوجي أصغر من ١٠٠ }

القطعة الصغيرة ( - ) تقرأ : هي

ثم إنه إذا تكرر ذكر إحدى المجموعات في نص رياضي معين فلا نظن أن الرياضي يكتبها في كل مرة ، ولا نتظر منه ذلك

عندما يكتب المجموعة لأول مرة بصح أمامها حرفا كبيرا مثل صـ «أو يسميها بـ صـ» مثلا :

صـ « { ص : من عدد زوجي اصغر من ١٠٠ }

وعندما يريد ذكر هذه المجموعة مرة ثانية فإنه يكتب المجموعة من «وإذا أردت أن تعرف ماهي ص عليك أن تنظر إلى الأعلى»

نعم يا صديقي هذه حال الرياضيين، فهم لا يحبون الكتابة كثيرا، وكذلك لا يحبون الكلام كثيرا، ولذلك فعليا أن نعلم كيف نقرأ كتاباتهم والمهروعلوفية هذه

إن الرياضيين يسعون دائما لاستخدام أقل عدد ممكن من الرموز لا عطاء أكثر قدر من المعلومات - وعندما تتحول أبسط الأشياء إلى لغة الرموز والمصطلحات تتصور دوما أنها قد أصبحت أشياء غير مفهومة. وإذا سألت الرياضي بدهشة عما تعنيه هذه الرموز والمصطلحات ولماذا يستخدمها في كتابته هل يجيبك الرياضي بأكثر من انشامة عامصة. فما رأيك بهذه الإحالة؟ إنهم يستمتعون بلغة الرموز هذه... أما نحن فعليا أن نناقش طويلا «وبملا» هذه الرموز حتى نستطيع أن نقرأ ونفهم كل ما يكتبون.

وبما أننا نوقعا بعض الشيء عند الرموز والمصطلحات، هل نستطيع أن نعرف ما الفرق بين الرمز ب والرمز {ب}؟

الإحالة بسيطة. إن الرمز ب هو رمز عادي، «أو حرف» نكتب به عن عنصر مجموعة ما.

أما الرمز {ب} فهو يعني مجموعة مؤلفة من عنصر واحد هو ب

أما إذا لم يكن هناك أي عنصر في المجموعة نمر لها بالرمز ∅ وتقرأ «فاي»

«نلاحظ أن هذا الرمز يشبه الصفر العربي (٠)، مشطوبا أي ∅» وإذا

(١) نسمي الأرقام 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 بالأرقام العربية. يهاجس الأرقام ١٠، ١١، ١٢، ١٣ بالأرقام الهندية

سألك أحد السؤال التالي ماذا يعني بالكتابة  $\{ \{ \text{ب} \} \}$  ؟

يمكنك أن تجيب هذه مجموعة مؤلفة من العنصر الوحيد هو المجموعة  $\{ \text{ب} \}$  أي أن عناصر المجموعة قد تكون مجموعات بدورها، وهذا شيء طبيعي جدا أي أنه يمكن أن نجد مجموعات من الشكل:

$\{ \{ \text{ب} , \text{ج} \} , \{ \text{د} , \text{هـ} \} , \{ \text{و} , \text{ي} \} \}$

أي مجموعة عناصرها هي مجموعات تتألف كل منها من عنصرين  
والآن نستطيع أن نسأل - ذلك الرياضي - السؤال التالي

هل يوجد مجموعة جميع المجموعات؟

ومهما يكن جوابه - التأكيد أو النفي - تظاهر أمام هذا العالم باحتراسك الشديد له لاتساع معارفه في نظرية المجموعات، ذلك أني أشك في فهمه لجوهر هذا السؤال. فهذا السؤال قد طرحه الفيلسوف والرياضي الإنكليزي برتراند راسل (1872 - 1970) ولا يوجد له حتى الآن جواب محدد ووحيد حتى عند الرياضيين أنفسهم.

انتهاء عنصر إلى مجموعة وترميزه

لنفرض أن لدينا مجموعة  $S$  تحوي ثلاثة عناصر  $\text{ب} , \text{ج} , \text{د}$

أي أن  $S = \{ \text{ب} , \text{ج} , \text{د} \}$  فهذا يعني أن -

$\text{ب}$  عنصر من المجموعة  $S$  و

$\text{ج}$  عنصر من المجموعة  $S$  و

$\text{د}$  عنصر من المجموعة  $S$

ولكنني اعتقد أنه أصبح واضحاً لك أنه لا يوجد رياضي يكتب بهذا الشكل، أو يعبر بهذا الشكل عن وجود العنصر  $\text{ب}$  مثلاً في المجموعة  $S$ ، ذلك أن الرياضيين، وكما قلت لك سابقاً، لا يحبون الكتابة فيما أن يصطدم الرياضي بتكرار نفس الكلمات بنفس الترتيب حتى يبحث عن رمز يكون بديلاً لهذه



الكلمات «ولست أدري من أين يأتون هذا العدد الكبير من الرموز»  
وهكذا عدلا من كتابة العبارة «هو عنصر في المجموعة»، أو ينتمي  
للمجموعة، أدخلوا الرمز  $\in$  (ويقرأ ينتمي للمجموعة .) وكتبوا.

ب  $\in$  مـ

جـ  $\in$  مـ

د  $\in$  مـ

أما إذا كان العنصر لا ينتمي للمجموعة فإن الرياضيين يستخدمون لذلك رمزا  
مشابها مشطوبا عليه أي  $\notin$  (تماما كما يعتبرون أن الرمز  $\neq$  يعني . لا يساوي) -  
فلإشارة - مثلا - أن العدد  $\frac{2}{3}$  ليس عنصرا من المجموعة مـ يكتبون  
2  $\notin$  مـ .

تمثيل المجموعات بالرسوم ( المخططات ).

س - وهل يمكن تمثيل المجموعة بالرسوم؟

ج - كنت أعلم أنك سوف تطرح علي مثل هذا السؤال لأننا جميعا نحب الرسوم  
ونعبرها أسط وسيلة للإيضاح لقد طرحت مثل هذا السؤال يوما ما على  
أحد الرياضيين معتقدا أنني سوف أحمله معجبا بي لسعة اطلاعي على نظرية  
المجموعات .

فهل تدري كيف أحيانني على هذا السؤال؟ . كان يجب أن ترى إجابته لا أن  
تسمعها فقط فقد اعترى وجهه للوهلة الأولى ، فور سماعه السؤال ،  
انقاص وكأنه أكل لتوه قطعة ليمون ثم نظر إلى بعد ذلك نظرة أسف ، ثم  
حك وراء أذنه وقال :

[ نعم . نعم لقد سمعت أنهم يقومون تمثيل المجموعات بالرسوم وذلك  
على سبيل التمرين في رياض الأطفال وما شابهها . وبما أنه يجب أن نرسم  
للأطفال شيئا ما لنثير اهتمامهم فقد لا يكون هذا العمل - تمثيل المجموعات  
بالرسم - سيئا للدرجة كبيرة ، ولكن تأكد أن كتب الرياضيات الجديدة لا تجد

فيها أي رسوم للمجموعات (هذه الرسوم يحددها عادة في تلك الكتب التي تحوى ما يمكن أن تسميه بنظرية المجموعات المسطحة (أو الساذجة) فقط، أما في الكتب الأخرى فلا يمكن أن يحدد رسماً لمجموعة)، نطلق عادة اسم نظرية المجموعات المسطحة (السادجة) أو الكلاسيكية على تلك الماهيم من نظرية المجموعات التي تدرس في المدرسة (في المراحل الأولى منها).

وبصورة أدق: إن نظرية المجموعات المسطحة هي التي لا يوجد في أساسها أي مسلمات، أي ندرسها دون أن نصنع مسلمات بنظرية المجموعات في أساسها.

ولكننا نصادف - بالطبع - أحيانا «نظرية المجموعات المختلفة» (وهذا بالطبع ليس تسمية رسمية لما يصادفه) التي لا علاقة لها بنظرية المجموعات المسطحة ولا علاقة لها بنظرية المجموعات المبنية على أساس المسلمات ولا علاقة لها حتى بالرياضيات كلها.

ج - هذا أمر شيق فعلا . وما هوية نظرية المجموعات هذه؟

● يمكنك أن تتصور هويتها بنفسك انطلاقا من الأمثلة التالية التي قد يصادفها فيها:

يرسمون ثلاث بقرات ودجاجتين وكلباً واحداً، ثم يحيطونها جميعاً بخيط واحد، وهذا الشكل الناتج يسمونه بمجموعة، أما إذا لم تحطها بأي خيط فهذه ليست مجموعة!!

وإذا أحطنا بعد ذلك البقرات وحدها بخيط آخر والدجاجتين بخيط ثالث (أو حط) والكلب وحده، فالشكل الناتج هو مجموعات جزئية!!

وبعد أن يتعرف «قطيع» الأغنام على هذه الأمثلة، سوف يصبح كل «حروف» متأكد من أنه قد فهم نظرية المجموعات بشكل كامل مادام قد فهم هذه الأمثلة!!

هذا هو - على الأغلب - أكبر نقص في تمثيل المجموعات بواسطة الرسوم، وفي

بعض الوقت، هي المسبب الرئيس لعدم جذبة مثل هذه (الطريات)

ح - بعد هذا الشرح والتفسير من قبل الرياضي لم أعد أربح أمدا في أن أحرق بصراحة أبي أما أيضا قد مثلت المجموعة بالرسوم واعتبرت أبي قد تعلمت المجموعة بسرعة بفضل الموهبة الرياضية الطبيعية التي انتمت بها بكل نواضع!!

عبر أمك قد اقتنعت معي بنفسك أن متابعة الحوار مع هؤلاء الرياضيين سوف تفقد كل معنى لها، لأنه سوف يبدأ بعد ذلك باستجوابي حول رأيي في بعض مسلّمات نظرية المجموعات.

ولكن ما فائدة هذه المسلّمات لي والآن طالما أبي أستطيع باستخدام بعض الرسوم أن أفسر كل شيء بشكل مختار إضافة لذلك أستطيع استخدام الألوان والوسائل الأخرى مثل الدوائر الصغيرة والنقاط والمثلثات و... لتسمية وترميز عناصر المجموعة وهذا شيء جميل جدا. ولكن هذا الرياضي يهدى تخوفه من كل هذه الرسوم والوسائل ويدفعني بحوا استخدام المسلّمات وهذا هراء. وأما لن استخدمها كنت أتمنى أن ترى وجهه عندما يطر إلي وهو يقول:

إن كل حروف ه سوف يصح متأكدا من أنه قد فهم نظرية المجموعات بشكل كامل طالما أنه فهم هذه الأمثلة (هذه قلة أدب واستحسان بالأس).

بعد حديثي مع هذا الرياضي بهذا الشكل المتعسف، رجعت في معرفة وجهة نظر مدرس الرياضيات ذي الخبرة الطويلة في العمل التربوي. فتوجهت إلى ربةارة أحد مدرسي الرياضيات القدامى الذي أحيل على التقاعد مد رمن وسألته:

- أرحو أن نفسر لي لماذا ينهرب الرياضيون من تمثيل المجموعات بالرسوم؟

تنجح ، هذا المرء ، ثم أجابني معسرا بلطف مناء.

+ هناك حملة مشاكل تكرر أثناء تمثيل المجموعات بالرسوم، ولذلك فإن الرياضيين يتهربون منها واليك أمثلة من هذه المشاكل :

● عاليا ما تمثل عناصر المجموعة أثناء الرسم بنقاط متماثلة، ودوائر صغيرة متماثلة أو بمثلثات، ولكنا نعلم أنه لا يوجد في المجموعة عناصر متماثلة<sup>11</sup> أي أن جميع عناصر المجموعة تكون مختلفة ومتمايزة

● هناك بعض المجموعات - مثل مجموعة كل النقاط في المستوى - لا يمكن أن يحيطها بخط مغلق.

● إضافة لذلك عليك أن تكون حذرا - وبصورة خاصة - عندما تريد أن تشير إلى مجموعة واقعة داخل مجموعة والتي نسميها مجموعة جزئية، ذلك أن هذه المجموعة الجزئية يمكن أن تفهم وكأنها عنصر من المجموعة الأصلية. فإذا صادفنا مثل هذه الحالة - مجموعة داخل مجموعة فإن بعضهم سوف يؤكد على أن هذا عنصر من المجموعة وليس مجموعة جزئية والآخرين يؤكدون على أنها مجموعة جزئية.

● ويمكن أن نجد أبصارا يريد أن يشير إلى المجموعة الخالية فيأخذ قطعة ورق نظيفة ويؤكد على أنها تمثل المجموعة الخالية. . .

( لقد قدم لي الكثير من الأسباب، ولكنني أعترف أنني نسيته. أعتقد أن هذه الأسباب التي ذكرتها تكفي). ولهذا فإن الرياضيين يتهربون قدر الإمكان من رسم المجموعات.

- وهل هذا يعني أنه يجب عدم رسم المجموعات؟

+ كلا أنا لم أقل ذلك أحيانا يكون الرسم موضحا للمفكرة.

فأنا أعلم بالشجرة أن الأطفال يحبون الرسم. ولكن يجب علينا، في كل مرة تلجأ فيها للرسوم، أن نذكر الأطفال أننا نستخدم الرسوم كوسيلة مساعدة لملاحظة المجموعة وفهمها بسهولة وليس أكثر من ذلك.

وعلى كل الأحوال يجب تحذيرهم والاعتماد في استخدام الرسوم ذلك أن هذا

التمثيل يعطيهم - كقاعدة عامة - تصورا خاطئا عن المجموعات .

إذن نستطيع - إذا أردت - أن نستخدم تمثيل المجموعات بالرسم ، على ألا نأخذها بشكل حدي تماما .

- ولكن ما هي الأساليب التي يمكن أن نعمل فيها المجموعات ؟  
 + إن تمثيل المجموعات يتم بأساليب مختلفة فلا توجد هنا أي قاعدة لاستخدام أسلوب معين لتمثيل مجموعة في موقف رياضي معين طالما أن كل الأساليب لا تنتمي إلى الرياضيات !!

ولكن يوجد - في الواقع - أسلوب رياضي واحد صحيح لتمثيل المجموعات ، وهذا الأسلوب يمكن استخدامه فقط في حالة كون المجموعة لا نهائية .

وبصورة أدق . يمكن استخدام هذا الأسلوب في تمثيل المجموعة عندما نكون مجموعة مؤلفة من عدد لا نهائي من العناصر بشرط أن تكون هذه العناصر نقاطا .

- وما هذا الأسلوب في تمثيل المجموعات ؟

+ يمكن أن نعمل المجموعة - بشكل تقريبي - بجزء من المستوى محاط بحظ معلق . فإذا فرضنا أن جميع النقاط ضمن الخط المعلق عناصر للمجموعة (وعدها لا نهائي) فإن تمثيل هذه المجموعة قد تم بشكل صحيح

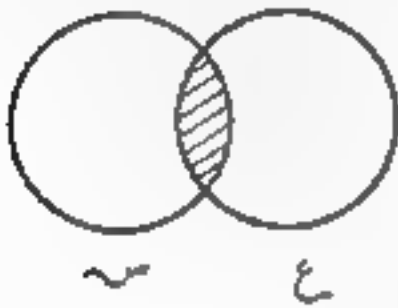


إن مثل هذا التمثيل للمجموعات يسمى «محظوظ قن» (1) لتمثيل المجموعات ، ومثل هذه الرسوم غالبا ما تساعد على التأمل والتفكير والوصول إلى النتائج الصحيحة طالما أنها تسمح بربط المجموعة «المجردة» بمجموعة حقيقة مرسومة على الورق . أصف إلى ذلك ، أنه لدى تمثيل المجموعات اللاهائلة بهذا الشكل ،

(1) جون فري ( ١٨٣٤ - ١٩٢٣ ) عالم سطر إنكليزي

لن ننشأ أي مشكلة من تلك المشاكل التي يتصف بها التمثيل بالرسوم لمجموعات ذات عناصر منتهية.

فإذا أردنا مثلاً أن نشير إلى المجموعة المؤلفة من العناصر المشتركة بين مجموعتين (أي تقاطع مجموعتين) بمحطات من للمجموعات التي هي جزء من المستوى  $\mathcal{E}$ .



فيمكننا تنفيذ ذلك بسهولة

(كما في الشكل المجاور ، غير أننا يجب أن نتذكر أن الجزء المشترك بين المجموعتين  $\mathcal{E}$  هو أيضاً مجموعة ذات عناصر غير منتهية - في الحالة العامة - والجزء المشترك بين المجموعتين  $\mathcal{E}$  هو الجزء المظلل في الشكل.

بذن فقد اتضح لنا ، بهذه الطريقة ، إمكانية تمثيل المجموعات اللانهائية بالرسم (وإن كان بطريقة غير عادية) ، وذلك فقط في حالة كون عناصر المجموعة نقاط المستوى ، والرياضيات لا تبنى أي معارضة لهذه الطريقة

وعلى هذا الأساس ، فإذا كنت ترغب في عرض المجموعات بواسطة المخططات ، فعليك أن تفعل ذلك تماماً كما قلت لك .

أي فقط في حالة المجموعات المؤلفة من عدد غير منته من العناصر والعناصر هي نقاط المستوى ، أما إذا كنت تتعامل مع مجموعات مؤلفة من عدد منته من العناصر فمن الأفضل أن تكتب هذه المجموعات لا أن ترسمها

- بالأسف - لقد طست أنه فصل الرسوم سيكون «في حبي» عدد قليل من المجموعات !

+ الكثيرون ظنوا ذلك يأسى . ولكن من الأفضل أن نحتفظ بهذه «لأشياء» في رأسك ولنس في «جيبك» !

## المجموعات المتساوية - مصدر سوء الفهم

س - ولماذا يكون تساوي المجموعات مصدر سوء الفهم؟  
ج - ذلك لأنها عندما يدرس تساوي المجموعات ننسى - عادة - إحدى أهم خصائص المجموعات والتي تنلخص في أنه لا يوجد في المجموعة عناصر متماثلة، أي أن كل العناصر في المجموعة يختلف الواحد منها عن الآخر

س - وهل هذا يعني أنه لا يمكن أن نضع بعض العناصر المتماثلة في مجموعة؟  
ج - يمكن أن نضع ماشاء من العناصر المتماثلة في مجموعة، ولكن نعتبرها جميعها كمصدر واحد للمجموعة، وهذا بمائل تماما الحالة التي يشتري فيها شخص واحد خمس بطاقات للدخول إلى المسرح، فالبواب في المسرح سوف يأخذ منه البطاقات الخمس ويمزقها كلها - إذا رعب الشخص في ذلك - فكل هذه البطاقات تلعب دور بطاقة واحدة - إذا دخل فيها شخص واحد إلى المسرح - لقد دفع الشخص بدون مبرر ثمن خمس بطاقات تماما كما تحاول أنت - وبدون مبرر - أن تضع في مجموعة عددا من العناصر المتماثلة. إذن يفترض دوما أن كل عناصر المجموعة يختلف الواحد منها عن الآخر وبعبارة أخرى: المجموعة بالتعريف لا يمكن أن تحوي نفس العنصر في مواضع متعددة.

س - هذا واضح، ولكنني لم أفهم بعد، لماذا أصبح هذا مصدر سوء الفهم؟  
ج - سوف تصل نفسك إلى السب وتفتنع به ولكن يجب أولا أن نتعرف على الحالة التي تكون فيها المجموعتان متساويتين.

نقول إن المجموعتين  $S$  و  $T$  متساويتان فيما إذا احتوت كل منهما على نفس العناصر.

س - هذا تعريف بسيط جدا.

ج - هذا صحيح. فالتعريف بسيط ومفهوم. ومع ذلك فلنظر معا إلى المثال التالي:

إذا أخذنا المجموعتين  $\{a, b, c, d\}$  و  $\{b, c, d, e\}$  وأصبح لهما



متساويتان ويمكن ان يكتب التساوي بالشكل :

$$\{ب، ج، د\} = \{ب، ج، د\}$$

ولكن هل المجموعتان (ب، ج، د) و (ج، د، ب) متساويتان؟

س - نعم متساويتان ذلك أسهل تحويان نفس العناصر

ج - هذا صحيح . المجموعتان متساويتان رغم أن العناصر ليست بنفس الترتيب

فيهما، فحسن لم نقل أي شيء عن الترتيب عندما عرفنا تساوي المجموعات،

والمهم فقط هو أن تحوي المجموعتان نفس العناصر، لذلك فإن :

$$\{ب، ج، د\} = \{ج، د، ب\}$$

أما إذا أردت أن ترسم المجموعتين المتساويتين، فيجب أن تكون حلزرا

جدا لأنه تظهر باستمرار مشاكل أثناء ذلك و (سوء فهم) خصوصا في تلك الحالة

التي نكون فيها معرفة الناس بنظرية المجموعات معرفة بسيطة وضعيفة، ويظنون

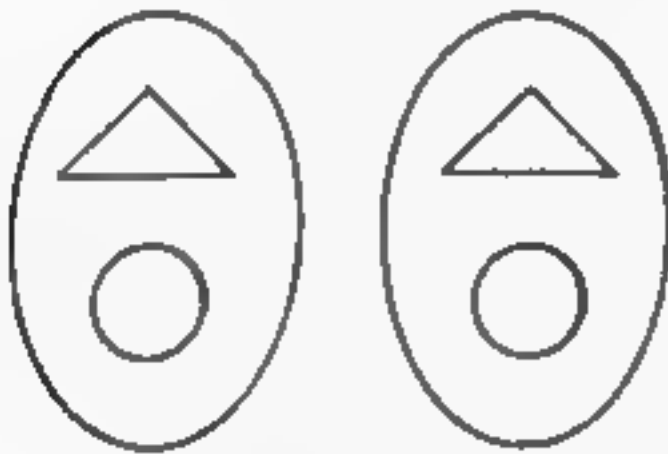
أنهم يعرفونها جيدا (كأنهم مختصون) بها. وهنا يبدو ذكاءهم الخارق صدفي

لقد قرأت كثيرا من المقالات أو الموضوعات تحت العناوين التالية :

هل المثلث في المجموعة الأولى يساوي المثلث في المجموعة الثانية؟

هل الدائرة الصغيرة في المجموعة الأولى تساوي الدائرة في المجموعة الثانية؟

هل . ؟



في حين أنه لا يمكن

الحديث عن تساوي

شكلين هندسيين

عندما يوجد الشكلان

في مجموعتين مختلفتين

(كما هو موضح بالرسم)

هنا يمكن أن يحدث فقط عن تطابق الأشكال الهندسية أو عن تكافئها.

(أي تساويها بالمساحة)، ولا يمكن أبدا الحديث عن التساوي بين المثليين كمجموعتين. فالتساوي يعني أن المجموعتين لهما نفس العناصر تماما وهذا هو سبب العلاقة السلبية بين الرياضيين ورسم المجموعات. واعتقد أنهم يحقون في ذلك.

أما إذ كنت شديد الرغبة برسم المجموعات فأنصحك بأن تمرر لكل عنصر داخل المجموعة برمر يختلف عن العنصر الآخر حتى لا تخطئ.

والآن تستطيع أن ترسم عناصر مجموعة بشكل نقاط إذا احتجت لذلك. طالما أنك تعرف الآن أن كل العناصر مختلفة، وأن الرسم للتوضيح فقط وليس أكثر... ولكن من الأفضل ألا نتحدث عن الأمثلة التي نستخدم فيها مجموعات عناصرها من الحياة مثل: تفاح، برتقال، صحن، كرسي، ومع ذلك فإن أحد «الاختصاصيين» لم يستطع أن يتقبل اعتبار العناصر المتماثلة كعنصر واحد فسر ذلك كما يلي:

«في السينما كل الكرسي متماثل، وهذا يعني أنه وفق نظرية المجموعات يوجد في السينما كرسي واحد فقط»، وهكذا فهو لم يفهم أنه لا يوجد، من وجهة نظر الرياضيات، في العالم كله كرسيان متماثلان. والآن تستطيع أن تحكم بنفسك: أليس تساوي المجموعات مبعأ لسوء الفهم؟

في الأمثلة:

$$\{\text{محمد، شادي، فادي}\} = \{\text{فادي، شادي، محمد}\}$$

$$\{2, 3, 5, 8, 9\} = \{9, 8, 5, 3, 2\}$$

لا يوجد أي مشكلة. فالساواة بين المجموعتين صحيحة.

والآن انتبه هل المجموعتان  $\{3, 4, 5\}$  و  $\{3, 4, 5\}$  متساويتان؟

س - المجموعتان غير متساويتين، ذلك أن المجموعة الأولى فيها أربع عناصر وفي المجموعة الثانية يوجد ثلاث عناصر!

ح - ماهذا الذي تقوله ؟ هل نسبت ماقلناه قبل قليل ؟ لقد قلنا إنه لا يوجد في المجموعة عناصر متشابهة ، وإذا وجدنا عناصر متشابهة مكنونة فإننا ننظر إليها وكأنها عنصر واحد فهي مثالها لم يكن من الضروري تكرار العدد / ٣ / في المجموعة الأولى طالما أنه يؤلف عنصرا واحدا هو العدد / ٣ / لذلك فإننا نكتب :

$$\{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

س - هذا صحيح ، وإن كان يبدو غريبا بعض الشيء ، ولكن هل هذا يعني أن  $\{2\} = \{2, 2, 2, 2, 2\}$  ؟

ح - نعم إن  $\{2\} = \{2, 2, 2, 2, 2\}$  ، وكذلك فإن  $\{1\} = \{1, 1, 1, 1, 1\}$  (١)

هل رأيت كيف يمكن أن نخطئ بسهولة إذا نيت تعريف لمجموعات المتساوية ؟

المجموعة المحتواة في مجموعة أخرى :

أو المجموعة الجزئية :

س - ما هذه المجموعة الجديدة ؟ وكيف يمكن أن نفهم أن مجموعة محتواة في مجموعة أخرى ، أو أن مجموعة ع هي مجموعة جزئية من المجموعة س ؟

ح - يمكننا أن نشبه هذا باستئجار شقة في المجموعة مثلا . «ولكن احصص صورك عدد تكرار ذلك حتى لا يسمع الرياضي هذا التشبيه»

س - ها . ها . ها هذا يعني أنه يوجد مشكلة سكن أيضا في المجموعات . هذا مجتمع حما أريد أن أتعرف على هذا (السكن) «وهو يدفع هذا الساكن أجرة للشقة» ؟

ح - حسنا سوف نتعرف عليه الآن - ولكن عليك أن تعطيني مجموعه نريد أن نتعرف على ساكنها أو على مجموعتها الجزئية

س - وهل يوجد في كل مجموعة «ساكن»؟ أي هل يوجد لكل مجموعة مجموعة جزئية؟

ج - نعم يوجد . . . وكلما كانت المجموعة أكبر «أي كلما كان عدد عناصرها أكبر» كلما كانت المجموعة الجزئية أكبر.

س - ولكي اعتقد أنه يوجد مجموعة ليس لها أي مجموعة جزئية!

ج - هذا غير صحيح . لا يوجد مثل هذه المجموعة - ولكن ما المجموعة التي نقصدها أنت؟

س - المجموعة الخالية . وأما اعتقد أنه لا يمكن أن يكون لهذه المجموعة مجموعة جزئية أيضا.

ج - اعتقادك - للأسف - غير صحيح لأن المجموعة الخالية لها أيضا مجموعة جزئية.

س - وكيف يمكن أن يكون ذلك إذا كانت هي نفسها خالية؟

ج - لا يوجد جدال في هذا الأمر . وأنا معك في أن هذه الحالة غير عادية بعض الشيء ولكن الرياضيين يؤكدون على مايلي:

«إن المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية في كل مجموعة»

ومادامت المجموعة الخالية مجموعة كغيرها من المجموعات إذن لها مجموعة جزئية هي نفسها - للمجموعة الخالية.

أجبني / أحيرا / هل وجدت مجموعة تريد ان تتعرف على مجموعة جزئية منها؟  
س - لتكن مجموعة أيام الأسبوع.

ج - أنا موافق . لنكتب هذه المجموعة:

س = {السبت، الأحد، الإثنين، الثلاثاء، الأربعاء، الخميس، الجمعة} ولناخذ منها أيام الدوام في المدرسة:

ع = {السبت، الأحد، الإثنين، الثلاثاء، الأربعاء، الخميس}.

س - هذا غير صحيح . فهناك بعض المدارس تعطّل يوم الأحد.

ج - حساني هذه الحالة تكون -أيام الدوام في المدرسة لهذه المدارس هي:

ص = {السبت، الإثنين، الثلاثاء، الأربعاء، الخميس، الجمعة}  
ولنظر الآن إلى العلاقة التي تربط بين المجموعتين ع و ص والمجموعة الأصلية س  
من حيث العناصر في كل منهما.

س - هذا واضح مباشرة للعيان. إن كل عناصر المجموعتين ع و ص موحدة في  
المجموعة س.

ح - هذا صحيح وكل مجموعة تحقق هذه الخاصية - أو هذا المعيار - سميها مجموعة  
جزئية للمجموعة س أي أنه: إذا كان كل عنصر من المجموعة ع عنصرا من  
المجموعة س فإننا نقول إن المجموعة ع مجموعة جزئية للمجموعة س  
والرياضيون يستخدمون رمزا خاصا للمجموعة الجزئية وهو:

$\subseteq$  ففي مثالنا يكون:

ع  $\subseteq$  ص و ص  $\subseteq$  س

س - وهل يمكن أن تكون مجموعة ما مجموعة جزئية لنفسها؟

ح - نعم هذا ممكن. فتعريف المجموعة الجزئية لا يمنع من أن تكون مجموعة هي  
مجموعة جزئية لنفسها (هذا ما يعتمد الرياضيون على الأقل). وهكذا  
يكون:

ص  $\subseteq$  ص ، ع  $\subseteq$  ع ، ص  $\subseteq$  ص ويكون أيضا  $\subseteq$

ومع ذلك فلكي نفرق بين هذه المجموعات (التي يمكن أن تكون مجموعة جزئية  
لنفسها) وبين المجموعات الجزئية الحقيقية.

س - وما المجموعة الجزئية الحقيقية؟

ح - إذا حوت المجموعة عنصرا واحدا على الأقل لا ينتمي إلى المجموعة  
الجزئية، عندئذ ندعو هذه المجموعة الجزئية مجموعة جزئية حقيقية وهي  
مثالنا يكون ع و ص مجموعتين حقيقيتين للمجموعة س لأن س  
تحتوي عنصرا واحدا أكثر مما تحويه كل من ع و ص ويرمز عادة للمجموعة  
الجزئية الحقيقية بالرمز  $\subset$  أي يكون:

ع  $\subset$  ص و ص  $\subset$  س

وعندما نكتب جميع المجموعات الجزئية لمجموعة ما يجب أن نتبه جيدا حتى  
لا ننسى المجموعة الخالية.

م - حس حس لن أنسى المجموعة الخالية ولكن بقي لدي سؤال آخر، كيف  
يمكن أن تمثل المجموعة الجزئية بالرسوم؟

ح - استغرب كيف لم تطرح هذا السؤال حتى الآن؟  
فأنا أعلم أن أكثر شيء يعجبك في المجموعات هي الرسوم. ولكن طالما أنك  
سألت فسوف أوضح لك ذلك. تستطيع أن ترسم المجموعة الجزئية  
بالشكل التالي:



ولكن انظر معي الآن إلى الرسم التالي:  
تلاحظ معي أنه من الصعب أن نحدد المقصود  
بهذا الرسم: ماذا يمثل هذا الرسم؟

هذا ما حدثني به الأستاذ الذي حدثني عن تمثيل المجموعات بالرسوم،  
فهو يقصد بهذا الرسم تبيان مجموعتين جزئيتين للمجموعة الأصلية، أم  
المقصود به مجموعة مؤلفة من عنصرين وكل عنصر منهما مجموعة جزئية؟  
وقد نجد من يعبر بهذا الرسم عن مجموعتين حالييتين.

وكل شخص يستطيع أن يؤكد أنه يعبر في هذا الرسم عن ذلك الشيء أو  
المفهوم الذي يفكر فيه. وبصورة أدق، كل شخص يعبر عن ذلك الشيء،  
أو المفهوم الذي يفكر فيه وهو يرسم، وأنت لن تستطيع أن تقع أحدا منهم  
أن ما يوجد في الرسم هو شيء آخر يختلف عما فكروا به.

س - ما الحد الأقصى لعدد المجموعات الجزئية لمجموعة ما؟

ح - إن عدد المجموعات الجزئية لمجموعة ما يرتبط بعدد عناصر المجموعة نفسها  
وكلما كان عدد العناصر أكبر في المجموعة، كلما كان هناك عدد أكبر من  
لمجموعات الجزئية.

وإذا أردت أن تكتب جميع المجموعات الجزئية لمجموعة ما فإن أفضل طريقة لذلك هي التالي.

نكتب أولا لمجموعة الخالية (ذلك أنها مجموعة جزئية في أي مجموعة)، ثم نكتب كل المجموعات الجزئية التي تألف كل منها من عنصر واحد، ثم كل المجموعات الجزئية التي يوجد في كل واحدة منها عنصران وهكذا . . . . . وأخيرا نكتب المجموعة نفسها والتي تقسمها على أنها مجموعة جزئية من نفسها.

واليك هذا المثال

إذا كان لدينا مجموعة مؤلفة من ثلاثة عناصر

س = {ب، ج، د} فإن المجموعات الجزئية للمجموعة

س هي:  $\emptyset$ ، {ب}، {ج}، {د}، {ب، ج}، {ج، د}، {ب، د}، {ب، ج، د}.

{ب، ج، د} وعدد هذه المجموعات الجزئية ثمان.

هذا صحيح. فهذه هي كل المجموعات الجزئية لهذه المجموعات س وهي أكثر مما تصورت.

ح - لـ الآن كيف يمكن أن نشيء مجموعة جديدة باستخدام مجموعات معروفة.

س - وهل هذا الأمر ممكن؟

ح - ولم لا؟ وهما سوف ننصرف تماما كما في الأعداد

فكيف كان الأمر بالنسبة للأعداد؟ أي كيف أنشأنا أعدادا جديدة باستخدام أعداد معروفة؟

نحن نعلم أن الأعداد يمكن أن نجعلها أو نضربها أو نطرحها أو . . . . . وعندما نقوم بإحدى هذه العمليات على عددين فإننا نحصل على عدد جديد.

س - وهل هذا يعني أنه يمكن أن نجعل مجموعتين ونحصل على مجموعة جديدة؟

ج - نعم يمكن القيام بعمليات مشابهة على المجموعات، ولكن تسمية العمليات على المجموعات تختلف بعض الشيء مع أنها لا تختلف كثيرا في خواصها عن العمليات على الأعداد.

س - وما هذه العمليات؟

ج - العمليات على المجموعات هي: التقاطع، الاجتماع، (الاتحاد)، المتممة

س - وهل تستخدم لهذه العمليات رموزا خاصة بها؟

ج - طبعاً وسوف نتعرف فيما يلي على هذه العمليات وخواصها الأساسية

### تقاطع المجموعات:

س - هل سمعت سابقاً كلمة تقاطع؟ وأين سمعتها؟

ج - نعم سمعت هذه الكلمة. ولكي سمعتها في الهندسة فهي الهندسة نتحدث

عن تقاطع مستقيمين. اعتقد أنها تحمل نفس المفهوم بالنسبة للمجموعات

س - هذا صحيح. ولكن كيف نجد مكان تقاطع مستقيمين في المستوى؟

ج - نقطة التقاطع هي النقطة المشتركة بين المستقيمين

س - هذا صحيح. ولكن قل لي: إلى أي مستقيم تنتمي هذه النقطة؟

ج - نقطة التقاطع تنتمي لكلا المستقيمين، طالما أن الحديث يدور حول النقطة

المشتركة بينهما.

ج - هذا صحيح. وهو صحيح أيضاً في المجموعات. تقاطع مجموعتين هو

المجموعة المؤلفة من العناصر المشتركة بينهما. ثم إن هذين المستقيمين يمكن

اعتبارهما مجموعتين من النقاط، ونقول إن المستقيم له بناء بقطبي، وتقاطع

المستقيمين هو المجموعة المؤلفة من النقاط المشتركة بينهما، وطالما أن الحديث

يدور هنا حول نقطة تقاطع وحيدة، فإن مجموعة التقاطع في هذه الحالة هي

مجموعة مؤلفة من نقطة واحدة.

لسطر الآن إلى المجموعتين:

س -  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ع -  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$

س - هل نعرف أين تقاطع هاتان المجموعتان؟ ما العناصر المشتركة بينهما؟

ج - ان العناصر المشتركة بين المجموعتين هي 5، 6

ج - إذن تقاطع هاتين المجموعتين هو: . . .

س - هو المجموعة  $\{5, 6\}$



ج - هذا صحيح ها أنت ذا قد تعلمت شيئا جديدا عن المجموعات وهكذا  
نعرف التقاطع كما يلي :

إن تقاطع المجموعتين  $A$  و  $B$  هو المجموعة المؤلفة من تلك العناصر، فقط تلك العناصر، التي تنتمي إلى المجموعة  $A$  والمجموعة  $B$  في وقت واحد (أنا مضطر هنا لكتابة العبارة : «... من تلك العناصر فقط تلك العناصر...» حتى لا يفضي من الرياضيون طالما أنهم يؤكدون على أننا يجب أن نعبر عن التقاطع تماما بهذا الشكل) وهكذا فعندما نقول : «... تلك العناصر فقط تلك العناصر...» فإننا نعي بذلك أننا نأخذ عناصر محددة تماما، ولأننا أخذ أي عنصر آخر غيرها.

س - وكيف نرمز لتقاطع المجموعات؟

ج - ذكرتني بالرمز فشكرا لك لقد كدت أنسى الحديث عنه.

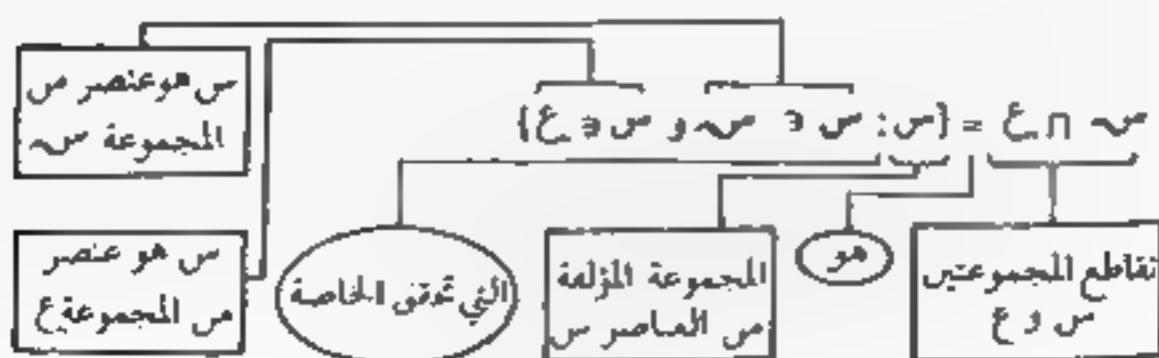
إن رمز التقاطع يشبه الحرف اللاتيني الكبير  $\cap$  ولكنه مقلوب إلى الأسفل هل ترى؟ إن الرياضيين لم تكفهم الرموز فتحولوا إلى الأحرف ليقلبوها. ترى ما الرمن الذي استعرقوه في التفكير حتى توصلوا إلى هذه الفكرة للرمز؟؟؟.

وهكذا فإن رمز التقاطع هو :  $\cap$

والآن انظر كيف نكتب عبارة التقاطع «بالاختزال الرياضي»

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

أعترف أن هذه الكتابة تبدو مزخرفة إلى أبعد الحدود مع ذلك لنحاول أن نترجم هذه «المزخرفة» إلى لغة الأحياء العادية نجد :



أما إذا سألك أحد الرياضيين «ما تقاطع المجموعتين  $M$  و  $N$ ؟» فإنك تستطيع أن تكتب له، بصمت، العبارة التالية:

$$M \cap N = \{x : x \in M \text{ و } x \in N\}$$

وأنا واثق أنه سيكون مسرورا جدًّا من إجابتك، رغم أن هذه الكتابة تبدو لك غريبة بعض الشيء وليست منطقية تمامًا. ولكن الرياضيين يؤكدون على أن لغة الرموز أكثر دقة من لغتنا التي نتحدث بها، وأن الكلمات الكثيرة غالبًا ما تشوش المعنى الذي نريده «نتذكرها، وبهذه المناسبة، الكثير من المعارف الذين يقولون كلمات كثيرة دون أن يفهم ماذا يريدون من وراءها».

لنلاحظ أيضًا أنه لا أهمية للترتيب في كتابة المجموعات لدى تقاطعها أي أن:

$$M \cap N = N \cap M$$

س - وهل يمكن أن يحدث عند تقاطع مجموعتين ألا نجد أي عنصر مشترك بينهما؟  
ج - طبعًا هذا ممكن. واليك هذا المثال:

$$M = \{1, 2, 3\} \quad N = \{4, 5, 6\}$$

وبما أن هاتين المجموعتين ليس بينهما أي عنصر مشترك فإن تقاطعهما هو المجموعة الخالية ونكتب:

$$M \cap N = \emptyset$$

ومع أن المجموعة الخالية تعني هنا أنه لا يوجد أي عنصر في مجموعة التقاطع، فالمجموعة الخالية نفسها موجودة.

س - ومع ذلك فأنا أجد صعوبة في تصور وجود مثل هذه المجموعة - المجموعة الخالية.

ج - إن المجموعة الخالية ليست موجودة فقط، وإنما تشغل مكانًا مرموقًا في المجموعات، ومع ذلك فهي تخلق - أحيانًا - شيطان التشوش واللبلة، وخاصة مع الرياضيين الجدد.  
س - وما سبب هذا التشوش واللبلة؟

ج - السب هو أن هذه المجموعة لا تحتوي أي عناصر.

إضافة لذلك فإن هذه المجموعة لها بعض الصفات المشوقة وإطلاقاً من هذه الصفات نستطيع أن نشكل عدداً من المجموعات الجديدة المختلفة.

س - كيف يمكن أن نشكل مثل هذه المجموعات إذا كان يوجد فقط مجموعة خالية واحدة؟ ثم كيف يمكن أن نشكل من «الخالية» شيئاً ما؟

ج - هذا ممكن وسوف ترى كيف نقوم بذلك إذا وجد أشخاص يستطيعون بناء نظرية من كلمات فارغة، ويستطيعون كتابة بحث علمي منها، ولماذا لا يستطيع الرياضيون بناء عنصر ما رياضي من المجموعة الخالية؟

لنبدأ بالمجموعة  $\emptyset$  ثم ننشئ المجموعة التي تحتوي عنصراً واحداً هو المجموعة الخالية أي  $\{\emptyset\}$

والمجموعة التالية ننشئها من هاتين المجموعتين أي  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . وهكذا فقد حصلنا على مجموعة مؤلفة من عنصرين. العنصر الأول هو المجموعة الخالية، والعنصر الثاني هو المجموعة المؤلفة من العنصر الوحيد  $\emptyset$

المجموعة الخالية. وهكذا فقد حصلنا على ثلاث مجموعات.

والآن يمكن أن نجد المجموعة الرابعة.  $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

وإذا تابعنا هذه العملية لإنشاء المجموعات، بحيث أن كل مجموعة جديدة تحتوي جميع المجموعات السابقة لها، عندئذ يمكن أن نحصل على سلسلة لانتهائية من المجموعات المختلفة فيما بينها، وبهذا الشكل أنشأنا واحداً من أطراف السلاسل في نظرية المجموعات، وكل عناصر هذه السلسلة تنبثق من المجموعة الخالية. هل رأيت كم هي مهمة هذه المجموعة الخالية؟

س - اعترف لك أنني لم أتوقع هذا من «الفراع»

إذن فقد تعرفنا على كل شيء عن تقاطع المجموعات وعن المجموعة الخالية.

ج - حسناً. إذا كنت قد فهمت كل ماقلته لك بهذا الموضوع فأجني على السؤال التالي.

ماناتح تقاطع مجموعة غير خالية ومجموعة خالية؟

س - إن تقاطع المجموعة الخالية مع مجموعة غير خالية يعطي . . . . .  
ولكن كيف يمكن أن تقاطع المجموعة الخالية مع أي مجموعة أخرى؟

ج - إن تقاطع مجموعة خالية مع مجموعة غير خالية يتم ببساطة متناهية.  
فالمجموعة الخالية - كما نعلم - هي أيضا مجموعة ككل المجموعات، ونقاط  
مجموعتين (حسب التعريف) هو المجموعة المؤلفة من جميع العناصر التي  
تنتمي للمجموعتين الأولى والثانية من هنا نستنتج أن تقاطع أي مجموعة  
مع المجموعة الخالية هو . . . . .

س - هو المجموعة الخالية.

ج - أحسنت. هذا صحيح وكيف تكتب هذا التقاطع؟

س - اكتب بهذا الشكل:  $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

ج - هذا شيء جميل، فقد كتبناها بشكل جيد. إذن فقد استوعبت عملية التقاطع  
بسرعة، سأعطيك سؤالا آخر ماذا نعني بالكتابة  $\emptyset \cap \emptyset$  أي: تقاطع  
المجموعة مع نفسها؟

س - إن تقاطع  $\emptyset$  مع  $\emptyset$  يعطي المجموعة  $\emptyset$ .

ج - ولماذا؟

س - لأن مجموعة التقاطع يجب أن تحوي عناصر المجموعة الأولى المشتركة مع  
عناصر المجموعة الثانية. فإذا كانت المجموعتان متماثلتين فإن التقاطع  
يصبح إحدى المجموعتين.

ج - وهل نستطيع أن نوضح لي ذلك بمثال؟

س - نعم وهذا بسيط جدا إذا كان لدينا المجموعة:

$E = \{1, 2, 3\}$  عندئذ

$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$  أو  $E \cap E = E$

ج - (اعتقد أنه بعد بضعة دروس سوف تبدأ أنت بتعليمي لقد اعتقدت خطأ أنك لن تتعلم مني أبدا، ولن تحببي على أي سؤال. وها أنت ذا تعطي الإجابة الصحيحة والكاملة مدعمه بالأمثلة!!) جيد إن كل ما كسبه صحيح. وإذا تابعت معي بهذا الشكل فسوف تبدأ بالكتابة والحديث بواسطة الصياغات الرمزية فقط. وهكذا أمل أن تكون قد حفظت أن تقاطع مجموعتين هو مجموعة.

س - طبعاً. وهل يمكن أن يكون تقاطع مجموعتين شيئاً آخر؟

ج - لا لا. أنا أكرر فقط لكي لا تنسى، وسوف أكون سعيداً جداً إذا ثبتت هذه الموضوعات تماماً في ذاكرتك.



سأطرح عليك سؤالاً آخر:

انظر إلى الرسم المقابل

نجد مستقيماً ق ومستويين

ي. ما تقاطع هاتين

المجموعتين؟

لنتذكر هنا أننا نعتبر ي، ق مجموعتين من النقاط، مع أننا لانضعهما ضمن قوسين.

س - هل نظن أن هذا السؤال صعب جداً؟ واضح أن تقاطع المجموعتين هو النقطة ب بالطبع.

ج - وكيف تكتب هذا؟

س - هذا سهل. اكتب التقاطع بالشكل.

ي  $\cap$  ق = ب

ج - هذا تماماً ما توقعته إن إجابتك غير صحيحة، وكتابتك أيضاً غير صحيحة.

س - ولماذا غير صحيحة؟ وأين الخطأ؟

ج - لقد أحبرتك سابقاً، وأكرر لك الآن. أن تقاطع مجموعتين هو مجموعة ليس

كذلك؟ ما النقطة ب؟

- س - النقطة ب هي عنصر من المجموعتين .
- ح - أما إجابتك فتعني : أن تقاطع مجموعتين (ي)  $\cap$  (ق) هو عنصر وليس مجموعة . ولكن . . . .
- ح - لا أريد ولكن لقد عبرت عن التقاطع بشكل غير صحيح ، ثم كنت التقاطع بشكل غير صحيح أيضا .
- س - إذن كان يجب أن أقول « إن تقاطع المستقيم ق مع المستوى ي هو المجموعة المألفة من العنصر الوحيد ب أي {ب} » .
- ح - نعم . هذه هي العبارة الصحيحة للإجابة . وهذه العبارة تكتب رمزيا بالشكل :  $ق \cap ي = \{ب\}$  .
- س - سوف أحفظ هذا التقاطع جيدا . . وهذا وعد مني .
- ج - وأنا مسرور لذلك .
- (ماذا حدث لمحدثي ؟ لقد نسي أن يسألني عن تمثيل تقاطع مجموعتين بالرسوم هذا غير مهم الآن . عندما انتهى من الحديث حول الاجتماع (الاتحاد) والتممة سوف أشرح له بنفسه كيف تمثل العمليات على المجموعات بالرسوم) .
- ومع ذلك ، فقل أن معترق أريد أن أسألك سؤالا آخرًا وعليك أن تفكر به جيدا ، وتبينني عليه في لفائنا التالي .
- س - سأجيب عليه بكل سرور . ماهذا السؤال ؟
- ح - هل تقاطع المستوى والمستقيم هو مجموعة مؤلفة من نقطة وحيدة دوما ومهما كان وضع المستقيم والمستوى ؟
- (إذا لم تعرف الإجابة عزيزي الفاريء فسوف تجد الإجابة الصحيحة في نهاية هذا الكتاب وتجد الإحانة على كل سؤال مرقم بهذا الشكل في قسم . حلول واجابات)

## اجتماع (اتحاد) المجموعات :

ح - لتعرف الآن على عملية اجتماع (اتحاد) المجموعات  
إن إشارة الاجتماع (الاتحاد) تشبه الحرف اللاتيني الكبير  $\cup$  وتبدو كما يلي .  $\cup$   
س - وكيف نعرف اجتماع مجموعتين؟

ح - سوف أوضح لك ذلك بالأمثلة . وبعد ذلك بصوغ التعريف ثم نتعرف على  
كيفية كتابة الاجتماع باستخدام الرموز . لبدأ بمجموعتين اختبريتين :

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{5, 6, 7\}$$

اجتماع هاتين المجموعتين هي المجموعة :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

ج - هذا بسيط جدا غاما كما لو أننا جمعنا هاتين المجموعتين .

ج - أنت على حق . ونحن أحيانا نستخدم كلمة (جمع) بدل كلمة «اجتماع»  
مجموعتين ، ولكننا مع ذلك لا نرغب في استخدام كلمة «جمع» لأن - كما  
نلاحظ - هذا ليس جمعا عاديا للعناصر .

لنأخذ مثالا آخر .

إذا كان لدينا المجموعتان :

$$A = \{a, b, c, d, e\} \quad B = \{f, g, h, i, j, k, l\}$$

فكيف نحدد اجتماع هاتين المجموعتين؟

س - إن اجتماع (اتحاد) هاتين المجموعتين هو المجموعة :

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$$

ح - ولماذا كتبت العنصرين  $d, e$  مرتين في المجموعة؟

هل سييت أنه يجب ألا تكتب العنصر إلا مرة واحدة في المجموعة؟  
لقد ذكرنا ذلك عندما تحدثنا عن تساوي مجموعتين .

س - آه . . . نعم هذا صحيح . لقد نسيت ذلك .

إن اجتماع (اتحاد) المجموعتين  $A, B$  يكون :

ق ل ك = {ب، ج، د، هـ، ن، م، ل}

س - هل كتابتي صحيحة؟

ج - نعم صحيحة. والآن تستطيع أن تعطيني تعريف الاجتماع.

س - ماهو اجتماع (اتحاد) مجموعتين؟

ج - اجتماع (اتحاد) مجموعتين هو المجموعة المؤلفة من جميع عناصر هاتين المجموعتين.

ج - هذا صحيح. والرياضيات تصوغ هذا التعريف بشكل أكثر دقة كما يلي  
«إن اجتماع (اتحاد) المجموعتين  $S$ ،  $E$  هو المجموعة المؤلفة من جميع العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين  $S$ ،  $E$  على الأقل».

ج - نعم. لقد فكرت أنا أيضا وفهمت الاجتماع بهذا الشكل.

ج - ولكك لم تذكر التعريف بهذا الشكل. والآن سوف أكتب لك هذا التعريف كما يكتبه الرياضيون:

$S \cup E = \{S: S \cup E\}$

س - هل تستطيع أن تقرأ هذه الصيغة؟

ج - نعم أستطيع: قراءتها

اجتماع المجموعتين  $S$  و  $E$  هو المجموعة المؤلفة من جميع العناصر من التي تحقق الخاصة.  $S$  هي عنصر من المجموعة  $S \cup E$  هي عنصر من المجموعة  $E$ .

ج - إجابتك ممتازة وأنا أهنئك على ذلك.

إذن فعندما تريد أن تحصل على اجتماع مجموعتين تستطيع أن تطبق هذا التعريف ولن تخطئ أبدا في إيجاد الاجتماع.

س - ومع ذلك فأنا لم أدرك الفرق بين الجمع والاجتماع فما الفرق بينهما؟

ج - إن الجمع هو عملية على الأعداد. أما الاجتماع (الاتحاد) فهو عملية على المجموعات، والعمليتان غير متماثلتين. فإذن مثلا حاصل جمع عددين صحيحين موجبين مع عدد عناصر مجموعة الاجتماع لمجموعتين وسوف



تؤكد من الاختلاف بينهما بنفسك .

سبحي نعلم أنه لدى جمع عددين صحيحين موحين . يكون حاصل الجمع دائما أكبر من كلا العددين المجموعين مثلا :

$$3 + 4 = 7 \text{ والعدد } 7 \text{ أكبر من العدد } 3 \text{ وأكبر من } 4 .$$

س - وهل هذا ما نلاحظه عند اجتماع مجموعتين ؟

ج - من الممكن أن نجد نفس الملاحظة . ولكن لا يشترط ذلك . أي أن هذه الملاحظة ليست صحيحة دائما في حالة اجتماع مجموعتين ففي المثال الأول كانت  $S$  مؤلفة من أربعة عناصر ،  $T$  مؤلفة من ثلاثة عناصر ، وعدد عناصر مجموعة الاجتماع هو ...

س - عدد عناصر مجموعة الاجتماع هو سبعة عناصر .

ج - هذا صحيح - ولكن لننظر إلى المثال التالي :

في المجموعة  $T$  يوجد أربعة عناصر ، وفي المجموعة  $K$  يوجد خمسة عناصر فما عدد عناصر مجموعة الاجتماع في  $U$  ؟

س - في مجموعة الاجتماع في  $U$  ك سعة عناصر فقط . هذا غريب حقا .

ج - إذن . عندما لم يكن للمجموعتين عناصر مشتركة - أي عندما كانت المجموعتان منفصلتين - فإن عدد عناصر الاجتماع يساوي مجموع عناصر المجموعتين . أما في الحالات الأخرى فإن عدد عناصر مجموعة الاجتماع يكون أقل من مجموع عناصر المجموعتين .

ج - هذا صحيح وواضح .

ج - انظر الآن إلى اجتماع المجموعة مع نفسها .

س - إذا كانت  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  فإن

$$S \cup S = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

ج - هذا صحيح لنر الآن ما اجتماع أي مجموعته مع مجموعة جزئية منها . مثلا إذا كان لدينا المجموعتان :

$$ع = \{ا، ب، ج، د، هـ، ل\} ص = \{ب، ج، د\}$$

ما اجتماع المجموعتين ع مع صـ (واضح هنا ان صـ  $\subseteq$  ع)؟

سـ - ان اجتماع هاتين المجموعتين هو المجموعة

$$ع \cup ص = \{ا، ب، ج، د، هـ، ل\}$$

ولكن هذه هي المجموعة ع نفسها!!

جـ - نعم هذا صحيح إذا كان صـ  $\subseteq$  ع فإن ع  $\cup$  صـ = ع

سـ - حقا إن لعملية الاجتماع خواص ممتعة. ولكن ألا يتغير الاجتماع إذا بدلنا موضعي المجموعتين؟

جـ - لا يتغير الاجتماع اذا بدلنا موضعي المجموعتين فمن أجل أي مجموعتين.

$$ع \cup ص = ص \cup ع$$

ونقول إن اجتماع المجموعات هو عملية تبادلية (تستطيع أن تتأكد من ذلك نفسك من الأمثلة السابقة).

سـ - وهل نستخدم اجتماع المجموعات أيضا في الهندسة؟

جـ - طبعاً ويستخدم المجموعات يمكن أن نعرف - وبشكل - أكثر وضوحاً مختلف الأشكال الهندسية. مثل المثلث والدائرة وغيرهما

سـ - نعرف الأشكال الهندسية باستخدام المجموعات؟ وكيف يكون ذلك؟

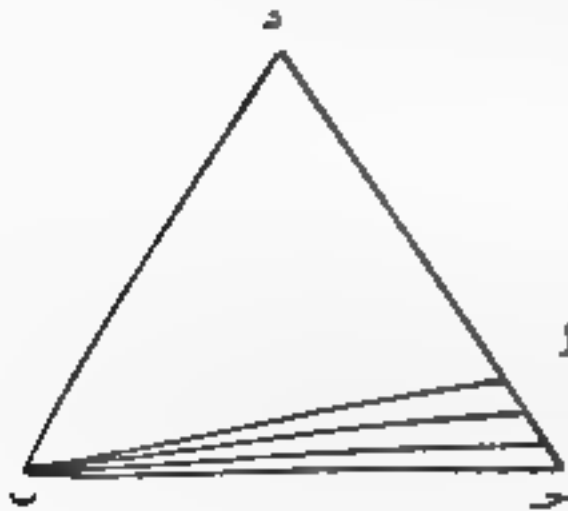
جـ - لنأخذ مثلاً تعريف المثلث (باعتباره

مجموعة نقاط في المستوى) نأخذ ثلاث

نقاط في المستوى ليست على استقامة

واحدة ب، ج، د نصل جـ د.

نعرف المثلث كما يلي.



المثلث ب ج د هو اجتماع مجموعة نقاط

كل القطع المستقيمة التي بدايتها في

النقطة ب وهمايتها على المستقيم جـ د



يسر الشكل يمكن أن تعرف الدائرة .  
فالدائرة هي اجتماع مجموعة نقاط كل  
انقطع المستقيمة التي بدايتها النقطة م  
وهيبتها تقع على الخط الدائري ك .

منتمية مجموعة .

ح - بعد أن تعرفنا على تقاطع واجتماع المجموعات، نعرف الآن منتمية مجموعة  
أو الفرق بين مجموعتين، وذلك من خلال اللعب بالمجموعات .  
س - إذا كان الأمر سيتم باللعب فليس لدي مانع .  
ح - سوف ترى ذلك بنفسك سوف أكتب الفرق بين مجموعتين، ويكفي أن  
تنظر إليه لكي تعرف كيف حصلت عليه .

ولكن قبل البدء لابد من أن نتعرف على رمز المنتمية .

إن رمز المنتمية أو الفرق بين مجموعتين يشبه رمز الطرح المعروف ولكنه مكتوب  
بشكل مائل أي : /

ج - حسن - لقد حفظت ذلك .

ج - لتأخذ الآن المجموعتين :

$$م = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ ع} = \{4, 5, 6, 7\}$$

الفرق بينهما سيكون :

$$\{1, 2, 3\} = \{4, 5, 6, 7\} / \{4, 5, 6, 7\}$$

$$\text{أو } م / ع = \{1, 2, 3\}$$

س - هل فهمت كيف حصلنا على هذه المجموعة الجديدة - مجموعة الفرق ؟

• يختلف هذا التعريف مع ما درجنا عليه في الكويت، إذ تعرف الدائرة كمجموعة  
هابات العظمة المستقيمة التي لها نفس الطول ونقطة البدء م أما التعريف هنا فينطبق على  
المسافة الدائرية

[المحرر]

• ينطبق هذا التعريف على المنتمية البنية، حسباً درجنا عليه هنا

[المحرر]

ح - بكل تأكيد فهمت . لقد حصلنا عليها بأحد عناصر المجموعة الأولى التي  
لا تنتمي للمجموعة الثانية .

ح - هذا صحيح - لقد أدركت أنك سوف تفهم هذا بسرعة

س - وهل تعطي الرياضيات هذا التعريف نفسه لفرق مجموعتين؟

ح - أرى أنك قد أصبحت حذرا جدا . نريد أن نعرف كيف يصوغ الرياضي  
تعريف المنتمية . التعريف هو:

الفرق بين مجموعتين أو منتمية مجموعة ع إلى مجموعة سـ أو سـ / ع هي

المجموعة المولدة من العناصر التي تنتمي للمجموعة س ولا تنتمي للمجموعة ع

ج - لا أصدق أن الرياضي يعطي مثل هذا التعريف .

س - ماذا تقول؟ ألا تصدق؟ ولماذا؟

(تري هل أخطأت أنا في التعريف؟ ... لالم أعطيه . إذن ماذا يقصد

بكلامه؟)

ح - إن الرياضي سوف يكتب التعريف بواسطة الرموز .

ح - (آه ... هذا صحيح تماما . الحق معه . ولكن انظر وسوف أطرح عليك

سؤالا ستجيب بعده أن نقول إنك لا تصدقي) .

س - وهل نعرف كيف يكتب الرياضي هذا التعريف؟

ج - نعم أعرف - وهذا بسيط جدا . إنه يكتب بالشكل

سـ / ع = (س : س ∩ سـ و س ∩ ع)

س - (اجابته صحيحة) وكيف عرفت ذلك؟ هل رأيت هذا التعريف في مكان

ما قبل الآن؟

ج - لا . لم أر هذا التعريف سابقا في أي مكان . ولكنني نظرت مرة أخرى إلى

تعريف الاجتماع (الاتحاد) ثم قرأت تعريف المنتمية ، وعرفت كيف يكتب

الفرق بالرموز .

ح - (هذه عملية تركيب جيدة: لقد استخدم ما هو معروف لديه حتى الآن،

ثم ربطه مع معارفه عن الموضوع الذي يدرسه الآن وهكذا استوعب

الموضوع الجديد الذي يدرسه جيدا  
اقرأ لي الآن ما كتبتة ومزييا.

س - بمكسي أن اقرأ الصيغة الرمرية كما يلي :  
فرق المجموعتين س و ع هو المجموعة المؤلفة من كل العناصر س التي تحقق  
الخاصة . س هو عنصر من المجموعة س وليس عنصرا من المجموعة ع .  
ح - إجابتك ممتازة . وأنا أعترف أنك قد أدهشتني بمعلوماتك الصحيحة .  
(لا أدري كيف استوعب الموضوع بهذه السرعة ، كما لو أنه أكثروعيا وذكاء من  
أبناء جيلنا . هل كان هذا نتيجة استخدام هذا الحيل لنوع معين من  
الفيثامينات؟ سوف أسأل طيبى عن ذلك عندما أراجعها من أجل الروماتيزم  
الذي أصابني).

حسن . وبعد أن عرفت الآن فرق المجموعتين س/ع حاول أن نجد ع/س .  
س - حسنا . ولكن سوف أكتب أولا هاتين المجموعتين .  
س = (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥) ع = (٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧) عندئذ  
ع/س = (٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧) / (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥) = (٦ ، ٧)  
ج - هذا صحيح .

س - هل نستطيع أن نلاحظ شيئا ما بمقارنة س/ع و ع/س؟  
ج - نعم . لاحظ أن: س/ع ع/س  
وهذا يعني أنه عند طرح مجموعتين لا يمكن أن سدل أماكنهما .

ج - صحيح إذن في حالة طرح المجموعات لانصح الخاصة التبدلية . أي أن  
الطرح في المجموعات عملية غير تبدلية

إليك الآن سؤالا آخر ولكن عليك أن تمكر به جيدا قبل أن نجيب عليه .

٢ - في أي حالة يكون عدد عناصر مجموعة الفرق س/ع مساويا للفرق بين عدد  
عناصر المجموعتين س، ع؟

\* الأسئلة المرقمة بالأرقام (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) تجد إجاباتها في نهاية الكتاب في قسم حلول

والجابت

س - اه - هذا سؤال صعب . سوف أجيب عليه وأنا أكتب الوظيفة البيتية أما الآن فقد شعرت ببعض التعب .

ج - حسن أنا أصدقك أذهب والعب . مع ذلك فلا تسر هذه المسألة

ج - اعتقد أنني لن أنساها .

(والآن سوف أشكل مع أصدقائي مجموعتين من اللاعبيين ، وترى من الأفضل أن

تكونا في لعبة كرة القدم ولكن أين الكرة؟ ترى هل تحولت إلى «مجموعة

حالية»؟ . . . لاها هي الكرة . . . لأذهب والعب)

التطبيق أو «التوصيل» أو «تصوير المجموعات»

س - ها - ها - ها . وهل المجموعات وثيقة لكي تصورها؟

ج - ها أنت ذا تمزح مرة ثانية ، وأما أحاول بجدية أن أعرفك على واحد من أهم

مفاهيم الرياضيات الحديثة والتي تعتبر حجر الأساس لها . فمفهوم

التطبيق ، والمحمول إلى الرياضيات في الحياة اليومية . . . .

س - وما علاقة التطبيق هنا مادام الحديث يدور حول «تصوير»؟

ج - هناك أيضا مصطلحات أخرى غير «التصوير» فهناك «التوصيل» ، أو «النقل» ،

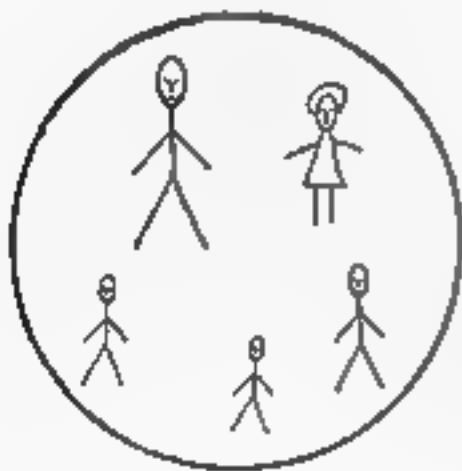
أو «استحواد» وكلها تنتمي لنفس المفهوم والذي نطلق عليه غالبا اسم

«التطبيق في المجموعات» .

س - وماذا نعني بهذا المصطلح؟

ج - قد يكون من الأفضل أن نبدأ بالأمثلة وسوف نجد الإجابة على كل

التساؤلات .



ليكن هناك مجموعة من الأولاد . وسوف

أرسمهم لك كما يفعل الأولاد عادة .

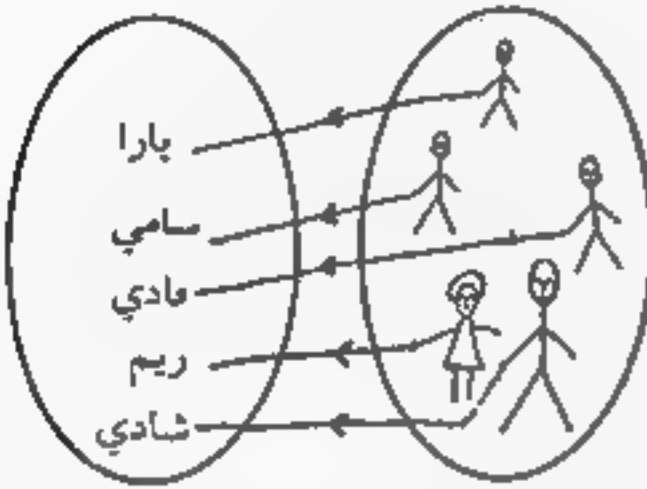
(وإن كنت لأحيد الرسم) نحن نعلم طبعاً

أن لكل ولد اسماً ساديه به . أي أن لكل ولد

اسماً معيناً . ولتكن الأسماء التي نناديهم بها

هي : شادي ، فادي ، ياراء ، ريم ، سامي .

إذن فلكل طفل اسم . ويمكن ان ترسم هذه العملية بالشكل :



أي نوصل بين كل طفل واسمه  
أو نربط كل طفل باسمه كما في  
الشكل :

أي ربطنا يد كل طفل باسمه .  
هذه العملية كلها تسمى تطبيقاً .  
ذلك أننا طابقنا أو (وصلنا) بين  
كل طفل واسمه . أي طابقنا  
بين عناصر المجموعة الأولى والمجموعة الثانية .

لنأخذ - كمثال آخر - هذا الكتاب . إن صفحات هذا الكتاب يمكن اعتبارها  
عناصر لمجموعة أولى ، وأرقام هذه الصفحات ١ ، ٢ ، ٣ . . . . . نعتبرها  
عناصر لمجموعة ثانية . إن كل صفحة من صفحات الكتاب قد خصص لها  
رقم معين . إذن فعناصر المجموعة الأولى يمكن أن نوصلها بعناصر المجموعة  
الثانية ، أو يمكن أن نجد تطبيقاً بينهما (بشكل يشابه الشكل السابق تماماً) .

لنأخذ كمثال ثالث مجموعة طلاب مدرستك ومجموعة الصفوف فيها . إن كل  
طالب في المدرسة يدرس في أحد الصفوف - هنا أيضاً يوجد تطبيق بين  
المجموعة الأولى والمجموعة الثانية : يمكن أن نوصل (أو ننقل) كل طالب إلى  
الصف الذي يدرس فيه . وأنا متأكد أنك تستطيع بمفردك أن تعطي عدداً  
من الأمثلة على التطبيق مثلاً :

تطبيق بين مجموعة الدول ومجموعة عواصمها .

والآن أخبرني : ما الذي يجمع بين هذه الأمثلة المختلفة ؟ أو بماذا تتميز هذه  
الأمثلة المختلفة ؟

ج - ما يجمع هذه الأمثلة هو أنه في كل مثال منها يدور الحديث حول مجموعتين ،  
واسمهم نصل بين عناصر المجموعتين .

س - هذا صحيح . ولسم المجموعة الأولى : مجموعة الانطلاق (التي تنطلق منها الأسهم) ، والمجموعة الثانية مجموعة الاستقرار (التي تستقر فيها الأسهم) ، (أو سميها المطلق أو المجال والمستقر أو المجال المقابل) . إضافة لما ذكرته أنت يوجد في كل مثال قاعدة معينة نسمح لنا بتطبيق إحدى المجموعتين على الثانية ، أي توجد قاعدة لربط عناصر إحدى المجموعتين بعناصر المجموعة الثانية . هل فهمت الآن ما التطبيق ؟ .

ج - نعم . فهمته جيدا (هل تعتبرني غبيا إلى درجة أنني لا أفهم مثل هذه الأمثلة البسيطة) .

س - حسنا . إذا كنت قد فهمت كل شيء فأخبرني ماذا تعرف عن التطبيق في المجموعات ؟

ج - لوجود تطبيق بين مجموعتين يجب أن يكون لدينا مجموعتان . مجموعة البدء (أو الانطلاق) ، ومجموعة النهاية (أو المستقر) ويجب أن يكون لدينا أيضا قاعدة نستطيع بواسطتها أن نرط بين عناصر المجموعة الأولى والمجموعة الثانية .

ج - لقد عرفت التطبيق بشكل ممتاز . وهذا يعني أنني أستطيع المتابعة . .

س - متابعة ماذا ؟ ألم تقل كل شيء عن التطبيق في المجموعات ؟

ج - ما قلناه هو أهم شيء فيه ، ولكن هذا ليس كل شيء . نلاحظ في التطبيق أن هناك سهما واحدا فقط ينطلق من كل عنصر من المطلق . (المجال) ولكن كيف تستقر الأسهم في المستقر أو المجال المقابل ؟ هناك حالات مختلفة لهذا الاستقرار وسوف أفسرها لك مستخدما لذلك مثالا : توزيع قطع حلوى على مجموعة من الأطفال .

س - توزيع قطع حلوى ؟ وأين هذه القطع ؟

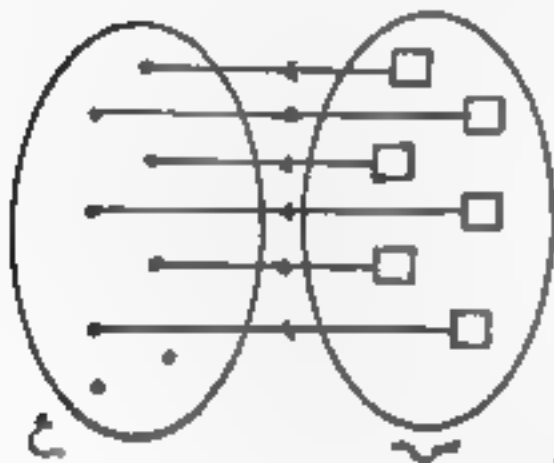
ج - أما لم أقل أنني سوف أوزع قطع حلوى . لقد أردت فقط أن استعرض بعض حالات التطبيق في المجموعات ، أما الأمثلة فهي فقط للتوضيح وإليك

المثال الأول :

لدينا ست قطع حلوى وثمانية أطفال إذن هنا لدينا مجموعتان المجموعة



الأولى، مجموعة المطلق وهي . ست قطع حلوى المجموعة الثابتة،  
مجموعة المستقر وهي . الأبطال الثمانية، أما توزيع الحلوى في هذا المثال  
فسوف يتم بالشكل التالي . لن يأخذ أي طفل أكثر من قطعة واحدة (أما  
الحلوى فسوف توزع كلها بالطبع) . ماذا نجد بعد توزيع قطع الحلوى؟



ح - سوف نجد ان طفلين لم يأخذوا حلوى .

س - وكيف يمكن أن نوضح العملية

بشكل تخطيطي؟

س - ولكني لأجيد الرسم . لذا فسوف

ارسم قطع الشوكولا بشكل مربعات

صغيرة وأرمز للأطفال بنقاط . بهذا

الشكل : وهذا الرسم يمثل العملية كلها :

ج - ممتاز . لنرمز لمجموعة الحلوى بالرمس - وللمجموعة الأطفال بالرمز ع

فإذا نظمت جيدا إلى هذا الرسم يمكن أن تتحقق من النتائج التالية .

١ - كل سهم ينطلق من أي عنصر من عناصر المجموعة س - ويستقر في أي عنصر  
من عناصر المجموعة ع .

في مثالا هذا كان توزيع الحلوى وفق المبدأ التالي :

نعطي كل قطعة حلوى لطفل واحد إلى أن ينتهي توزيع جميع القطع .

٢ - من كل عنصر من المجموعة س - ينطلق سهم واحد فقط (وبلغة الرياضيات

يقول . من كل عنصر من المجموعة س - ينطلق سهم وسهم واحد فقط)

لأنه إذا انطلق من أي عنصر سهمان فإن هذا يعني أن قطعة حلوى واحدة

قد أعطيت لطفلين وهذا ممكن في مثالا هذا ٣ - في كل عنصر من عناصر

المجموعة ع - يستقر سهم واحد على الأكثر وهذا يعني أن كل طفل لن يأخذ

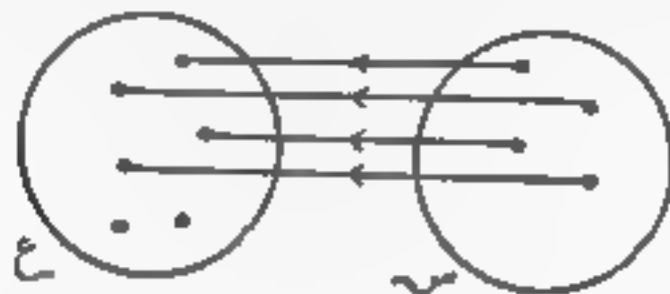
أكثر من قطعة واحدة ولكن يمكن أن نجد طفلا لم يأخذ أي قطعة يوجد

طفلا مثلا «فقد يكون معاقبا لخطأ ما قد ارتكبه» لذا فلم يعطه قطعة

حلوى هل هذا مفهوم؟

ح - مفهوم . وليس لدي أي سؤال .  
س - جيد . والآن ارسم وحدك مثالا آخر لتطبيق مماثل ، يكون فيه عنصر «معاقب» .

ج - هذا سؤال سهل جدا . سوف ارسم مجموعتين ، وأرمر لعناصرهما بنقاط بحيث يكون المطلق يحوي عناصر (نقاطا) أقل من عناصر المستقر ثم أصل بينهما بأشهر كما يلي :



س - حسا . ولكن ألا تستطيع أن تعطيني مثالا على تطبيق من حياة مدرستك ؟  
ج - نعم أستطيع ذلك .

في صفي يجلس كل طفل على كرسي وأمامه طاولته وأي يوجد في الصف كراسي بدل المقاعد . وهناك ثلاثة كراسي لا يجلس عليها أحد . تكون مجموعة المطلق (الجال) هي مجموعة طلاب الصف ، ومجموعة المستقر (الجال المقابل) هي مجموعة كراسي الصف . عندما يبدأ الدرس يجلس كل طفل على كرسيه ، ويبقى (في مجموعة المستقر) ثلاثة كراسي لم يجلس عليها أحد (لم يصلها أي سهم) .

ح - هذا المثال صحيح . وأنا أرى أنك قد فهمت هذه الحالة تماما .  
والآن عليك أن تحفظ . ان هذا التطبيق يسمى تطبيقا متباينا .

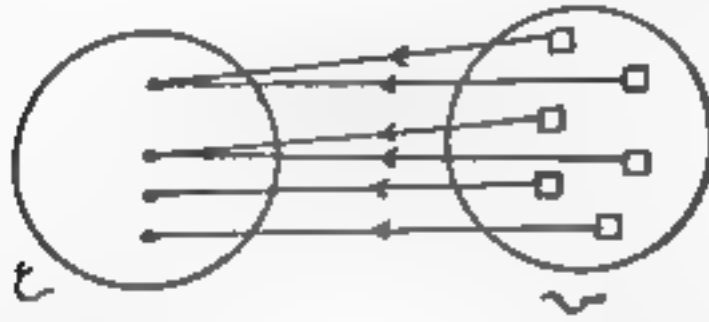
إذن فالنطبق المتباين هو التطبيق الذي يصل فيه العناصر المختلفة من المطلق بعناصر مختلفة من المستقر .

ولتأخذ الآن مثالا آخر على توزيع قطع الحلوى (لحد حالة جديدة للتطبيق) .

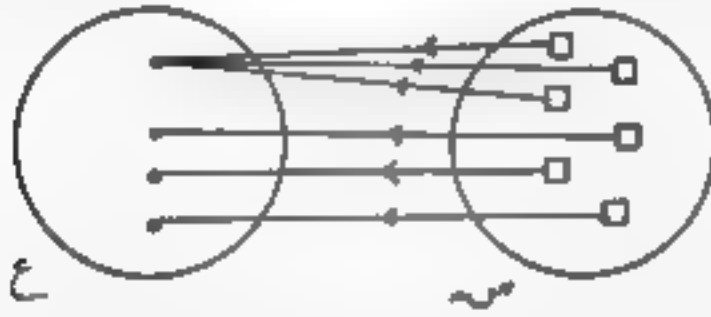
لنعرض أن لدينا ست قطع حلوى وأربعة أطفال . وتوزيع القطع يتم بالشكل التالي : كل طفل يأخذ قطعة واحدة على الأقل (أي يمكن أن يأخذ الطفل

أكثر من قطعة). كيف يتم توزيع قطع الحلوى في هذه الحالة؟

س - عند توزيع قطع الحلوى فإن طفلين سوف يأخذ كل منهما قطعتين من الحلوى، ويأخذ كل طفل من الأطفال الآخرين قطعة واحدة ويمثل العملية بالشكل التالي:



ج - هذا صحيح. ولكن يمكن أن يوزع قطع الحلوى أيضا بحيث أن طفلا واحد يأخذ ثلاث قطع ونفية الأطفال يأخذ كل منهم قطعة واحدة. وهذا رسم التوزيع الجديد:



س - هل يوجد هنا أطفال «معاقون»؟ (أي هل يوجد طفل لم تصله قطعة حلوى؟) أو هل يوجد عناصر في المستقر لم يصلها أي سهم؟  
ج - كلا لا يوجد أطفال «معاقون»، ولكن يوجد أطفال قد حصلوا على أكثر من قطعة حلوى.

ج - هذا صحيح لنصف الآن هذا التطبيق.

١ - كل سهم يطلق من أحد عناصر المجموعة س - ويستقر في العنصر المقابل في المجموعة ع.

٢ - من كل نقطة من المجموعة س - يطلق سهم واحد فقط

٣ - في كل لحظة من المجموعة ع يصل سهم واحد على الأقل .

ويمكن أن يصل العنصر أكثر من سهم .

ب مثل هذا التطبيق يسمى الرياضيون تطبيقاً غامراً (أو شاملاً) وما يميز هذا

التطبيق هو عدم وجود عناصر «معاقبة» أي لا يوجد أي عنصر في المستقر

لا يصله أي سهم، وفي مثل هذه الحالة نصح كل عناصر المستقر «معمورة»

والأسهم تعطي «أو تغمر» جميع عناصر المستقر

فكر الآن و عطي مثالا على هذا التطبيق من مدرستك .

س - مجموعة طلاب المدرسة ومجموعة صفوف المدرسة و .

ج - هذا صحيح إذا شكلنا من طلاب المدرسة مجموعة المطلق، ومن صفوف

المدرسة مجموعة المستقر فعندما يقرع الجرس ويتوجه الطلاب إلى

صفوفهم نجد الصورة التالية : « كل طالب يتوجه إلى صفه (من كل عنصر

من المطلق يطلق سهم واحد كل صف يدخل إليه عدد من الطلاب .

فمجموعة الطلاب تدخل وتشغل جميع الصفوف . وهذا تطبيق غامر (أو

شامل) .

ح - وصلنا الآن إلى الشكل الثالث والآخر من أشكال التطبيق .

ح - (الحمد لله ها نحن نقرب من نهاية هذا الموضوع)

س - ماذا تقول؟ ارفع صوتك فأنا لا اسمع ما تقوله .

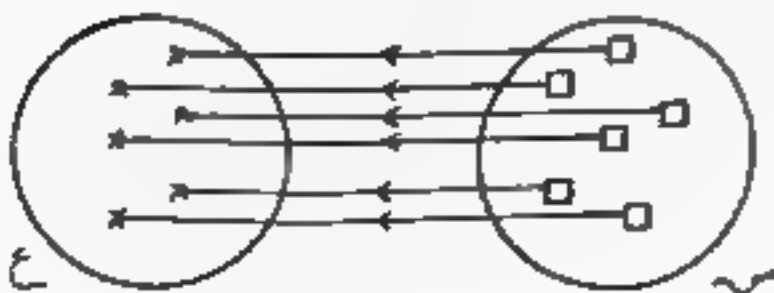
ح - أنا لم أقل شيئا . لقد قلت فقط إن هذا كله ممنوع جدا !!

ح - حسن لنفرض الآن أنه يوجد لدينا ست قطع حلوى وستة أطفال ونوزع

القطع على الأطفال بحيث . . . . .

ج - بحيث إن كل طفل يأخذ قطعة حلوى واحدة .

ح - صحيح ولرسم هذا الشكل من التوزيع



وإذا نظرتنا جيدا إلى هذا الرسم نستطيع أن نتأكد من .

١ - أن الأسهم التي تنطلق من عناصر مختلفة من المجموعة  $S$  تتوجه إلى عناصر مختلفة من المجموعة  $E$ .

٢ - أنه من كل نقطة من المجموعة  $S$  ينطلق سهم وسهم واحد فقط .

٣ - أنه في كل نقطة من المجموعة  $E$  يستقر سهم وسهم واحد فقط .  
 بهذا التطبيق إذن يتصف بصمات التطبيق العامر والمتباين ، فهو تطبيق متباين «ولكن بدون عناصر معاكسة» ، وهو تطبيق عامر «ولكن بدون عناصر مكافئة» .  
 أي عناصر يصلها أكثر من سهم . وهذا التطبيق الذي توصل فيه العناصر المختلفة من المنطلق بعناصر مختلفة من المستقر ، ولا يوجد عناصر في المستقر لا يصلها أي سهم يسمى تقابلا . والتعريف الدقيق لهذا التطبيق هو أن ذلك الشكل من التطبيق بين مجموعتين (العامر «الشامل» والمتباين في نفس الوقت) يسمى تقابلا .

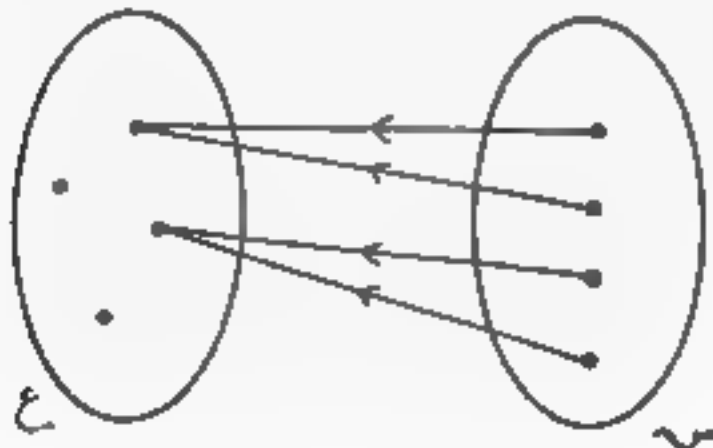
هل نستطيع أن نحري ما الذي يميز المجموعتين اللتين يمكن أن يكون بينهما تقابلا ؟

ج - نعم . إن ما يميز المجموعتين اللتين يمكن أن يكون بينهما تقابلا هو أن عدد العناصر فيها متساو .

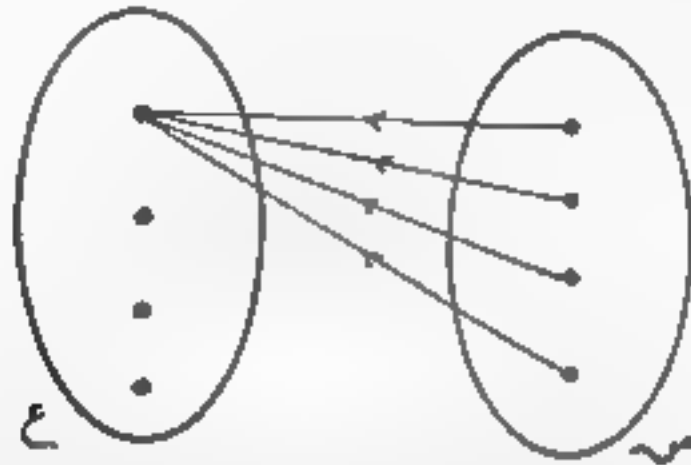
ح - هذا صحيح . والتقابل يمكن أن يتحقق فقط بين مجموعتين فيها نفس العدد من العناصر .

ولكن هل كل تطبيق بين مجموعتين لهما نفس العدد من العناصر هو تقابل ؟

س - اعتقد أن هذا غير صحيح - فقد يكون التطبيق بالشكل التالي :



ج - هذا صحيح . وقد يكون أيضا بالشكل :



(هل تستطيع أن تجد عريري الفاريء شكلا آخر لهذا التطبيق لا يكون  
تقابلا؟)

إذن إذا وجد تقابل بين مجموعتين، فإن هاتين المجموعتين نفس العدد من  
العناصر. وهذه الخاصية الصحيحة بالنسبة للمجموعات ذات العناصر  
المنتهية. قد وسعها كانتور لتشمل المجموعات ذات العناصر غير المنتهية.  
ومن الجدير بالذكر أن الرياضيين يولون أهمية بالغة هذا التوسيع إلى  
المجموعات غير المنتهية. ومن يرفض هذا التوسيع فإنهم يظنون إليه  
نظرة... (لا أحب أن أصفها)

ج - أشكرك على هذا التحذير سوف أحاول أن أحفظ هذا:  
إذا كان هناك تقابل بين مجموعتين، فإن للمجموعتين نفس العدد من العناصر  
سواء أكانت المجموعتان منتهيتين أم غير منتهيتين فإنا لا نريد الصدام مع  
الرياضيين.

س - أعطني الآن أمثلة على مجموعات يمكن أن يتحقق فيها بينها تقابل؟

- ج - أستطيع أن أعطيك الكثير من هذه الأمثلة إليك بعضها منها.
- مجموعة الدول الأوروبية - ومجموعة عواصم هذه الدول.
  - مجموعة السيارات - ومجموعة أرقام هذه السيارات في دولة معينة
  - مجموعة الأشياء المعروضة في واجهة إحدى المحلات - ومجموعة أسعار هذه  
الأشياء (بفرص أنه لا يوجد شيان لهما نفس السعر)

- مجموعة صفحات الكتاب - ومجموعة أرقام هذه الصفحات

س - اعتقد أن هذه الأمثلة تكفي . والآن أعطني مثالين جديين

س - مثال عددي؟ حسن . إليك هذا المثال:

- مجموعة الأعداد الفردية - ومجموعة الأعداد الزوجية .

نقابل كل عدد فردي بضعفه (أي نعصر من مجموعة الأعداد الزوجية).

ح - هذا صحيح يجب أن أعترف أنك قد وصفت مفهوم التقابل في جييك .

عمروا وضعته في رأسك . وإذا كنت قد فهمت مفهوم التقابل تماما، فلنستهز

هذه الفرصة لكي نتعرف على أحد المفاهيم بالغة الأهمية والمرتبطة بمفهوم

التقابل

س - وما هذا المفهوم؟

ح - هذا المفهوم هو : المجموعات المتكافئة بالقدر . نقول عن مجموعتين إنهما

متكافئتان بالقدر إذا أمكن إيجاد تقابل فيما بينهما

س - وهل هذا يعني أنه كان لدينا في جميع الأمثلة التي ذكرناها عن التقابل

مجموعات متكافئة؟

ح - بالتأكيد . كل المجموعات التي يوجد فيها بينها تقابل هي مجموعات متكافئة

بالقدرة هل لديك سؤال آخر؟

س - هل يوجد رمز خاص للتكافؤ بين المجموعات؟

ج - نعم يوجد رمز خاص هو  $\approx$  فنكتب (\*)

س -  $\approx$  وهذا يعني أن المجموعتين س و ج متكافئتان بالقدر . أي

أن لهما نفس العدد من العناصر .

ولنراجع الآن مع الأشكال الثلاثة للتطبيق على مثال مورع البريد الذي

يوصل الرسائل إلى البيت لتصور مورع البريد هذا مع حقيته المملوءة

(\*) تستخدم بعض الكتب الرياضية الأخرى الرمز  $\sim$  للعبر عن تكافؤ المجموعات بالقدر

فنكتب  $A \sim B$  (الترجم).

بالرسائل، يحمل الرسائل إلى مختلف البيوت إلى أن تفرغ حقيبته من الرسائل.

لدينا إذن في هذه الحالة مجموعتان. مجموعة الرسائل في الحقيبة ومجموعة البيوت في القرية التي يحمل إليها الرسائل. والآن فكر ثم اجني على الأسئلة الآتية.

متى تكون هذه العملية مع الرسائل تطبيقا متبايسا، ومتى تكون عامرا «شاملا»، ومتى تكون تقابلا؟

س - المسألة سهلة جدا . ولكنني سوف أحلها بمفردي فيما بعد .

ح - حسن . ولكن أرجو ألا تنسى وعدك هذا . وإذا كنت فعلا قد استوعبت تمام التطبيق بين المجموعات فإن هذا سوف يساعدك كثيرا في دراسة الرياضيات ومادام التطبيق بعد أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات .

س - لا أكاد أصدق أن هذا المفهوم بسيط إلى هذه الدرجة . ثم إنني لا أعتقد أن رياضيين يعرفون التطبيق بهذا الشكل ، بل بصوغونه بشكل أكثر تعقيدا .

ج - هذا صحيح . فالرياضيون لا يستخدمون هذه اللغة البسيطة التي نستخدمها هنا لعرض هذه المفاهيم وتبسيطها . إضافة إلى أنهم لا يرسمون مثل هذه الرسوم التي يرسمها للتوضيح ، ولا يعطون مثل هذه الأمثلة ، ولكنهم يتوصلون إلى نفس المفهوم الذي توصلنا إليه . واليك تعريف أحد الرياضيين للتطبيق :

« نعرف تطبيقا للمجموعة  $S$  في المجموعة  $E$  بالثلاثية

( $S, E, f$ ) التي تتألف من .

المجموعة  $S$  ونسميها مجموعة المطلق أو مجال التعريف، والمجموعة  $E$  ونسميها مجموعة المستقر أو مجال القيم أو مجموعة القيم

والماعدة  $f$  التي يمكن بواسطتها أن نربط كل عنصر من  $S$  مع عنصر  $E$  (العنصر  $E$  يتعلق بالعنصر  $S$ )



والعنصر الذي نحصل عليه من العنصر من بواسطة القاعدة تا يرمز له بالشكل  $\sim$  (س) ونسميه صورة العنصر س.

( من هنا جاءت إحدى تسميات التطبيق التي ذكرناها في بدايه هذا الموضوع وهي : تصوير المجموعات ).

وغالبا ما نتحدث عن العناصر من  $\sim$  كمتحولات مستقلة ، أما العناصر ع فتحدث عنها كمتحولات تابعة للتطبيق . هذا هو تعريف الربا صيات للتطبيق . والآن قل لي بصراحة ، هل فهمت كل ما قيل في هذا التعريف ؟

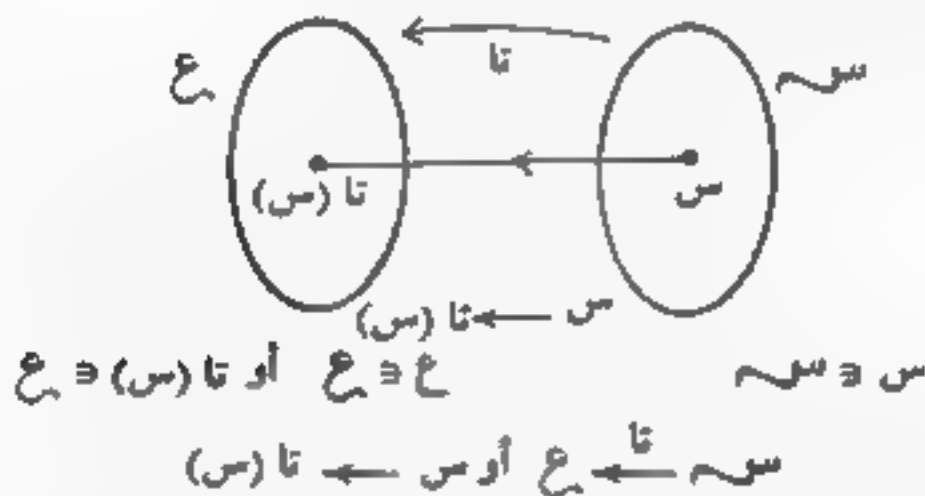
س - في الحقيقة أنني فهمت كل شيء .

ج - إذا كنت قد فهمت كل شيء ، في التعريف فاذكر لي ما حفظت منه .

س - موافق . ولكي سوف أستخدم الرسم أثناء ذلك ، لأن الإعادة ستكون أسهل بالرسم التوضيحية .

ج - حسن . ارسم وفسر ما حفظته من التعريف .

س - لدينا إذن مجموعتان  $\sim$  ، ع



والثلاثية (س ، ع ، تا) تتألف من مجموعة المطلق (المحال)  $\sim$  ومجموعة المستقر (المحال المقابل) ع والعملية تا أو القاعده التي يربط وفقا كل عنصر من  $\sim$  بعنصر من المجموعة ع . عناصر المجموعة  $\sim$  تسميها متحولات مستقلة . وعناصر المجموعة ع تسميها توابع . هل هذا صحيح ؟

ح - صحيح واعتقد أن الرياضي الحقيقي لن يستطيع أن يعاين في شيء فكل ما ذكرته صحيح .

إذن فالنقاط الهامة والمميزة في هذا التعريف، والتي لم نعلمها أنت، هي .

مجموعة المطلق ( المجال )  $\sim$  ( مجموعة التعريف )

مجموعة المستقر ( المجال المقابل )  $\leftarrow$  ( مجموعة القيم )

العملية أو القاعدة  $\tau$  التي تربط بواسطتها عناصر المطلق بعناصر المستقر

$$\sim \xrightarrow{\tau} \leftarrow$$

وقد نعبر عن العملية  $\tau$  في التطبيق بعبارة فيها طلب مثلا :

« أضف العدد ٥ » . عندئذ نكتب هذا التطبيق بالشكل :

$$5 + \sim = \leftarrow$$

أو « اضرب بالعدد ٤ ثم اطرح العدد ٢ »

$$\text{أي أن } \leftarrow = 4 \times \sim - 2$$

أو نعبر عن  $\tau$  بشكل آخر مثل « ربع العدد » أي :

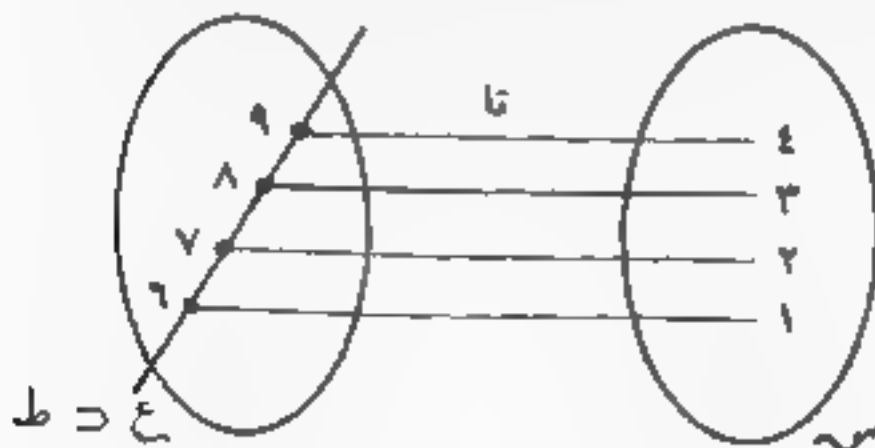
$$\leftarrow = \sim \div 4 \text{ أو بأي شكل آخر.}$$

فإذا أخذنا مثلا الطلب : « أضف العدد ٥ » أي  $\leftarrow = 5 + \sim$

وأخذنا مجموعة المطلق  $\sim = \{1, 2, 3, 4\}$

ومجموعة المستقر هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية أي

$\leftarrow \subset \mathbb{N}$  . عندئذ يمكن أن نمثل هذا التطبيق بالشكل .



$$\leftarrow = 5 + \sim$$

س - حقا إن هذا ممنوع وسيط جدا . إذن فالطبيق يلعب دور « الأمر » الذي يجب أن ننفذه لكي نحصل على عناصر المنفر من عناصر المطلق .

ح - نعم . يجب أن نهم التطبيق تماما بهذا الشكل

الأزواج - الثنائيات :

س - وهل للأزواج علاقة بالرياضيات ؟ وهل روح الأحدية (مثلا) هو مفهوم رياضي ؟ . لا اعتقد أنك تريد أن تتحدث عن الروحين أيضا (روح وروحة) كمفهوم رياضي ها . . ها . . ها . .

ج - اضحك . اضحك كما تشاء . ولكن الأزواج هو مفهوم هام جدا في الرياضيات . والزوج يعني مجموعة مؤلفة من عنصرين أي تحمل نفس المفهوم لكلمة «زوج» التي نستخدمها في حياتنا اليومية . ونستخدم في الرياضيات - طعنا - أزواجا مؤلفة من أعداد (صورة أساسية) وليس أزواجا من الجوارب أو القفازات .

س - وما حاجة الرياضيات إلى الأزواج ؟

ح - أرجو أن تتحل بالصبر بعض الشيء لأنه يجب أن تتعرف أولا على هذا المفهوم بشكل كامل وبعد ذلك نرى أين وكيف نستخدمه (وقد تكون استخدمته في مكان ما دون أن تسميه) تعلم أنه يمكن أن تأخذ أي عددين ونشكل منها زوجا .

والأزواج يمكن أن تكون أحرفا وليس فقط أعدادا، وهذه بعض الأمثلة :

٨،٤    ٧،٥    ن،م    ج،ع    س،ع

إذن من الضروري أن يتواجد في الروح عنصران، أما ترتيب تواجدهما في الروح فغير مهم، فالأزواج السابقة يمكن أن نكتبها أيضا بالشكل :

٨،٤    ٥،٧    م،ن    ع،ج    ع،س

ولكننا عاليا ما نعطي أهمية لترتيب كتابة عنصري الروح في الرياضيات . أي أنه هناك أهمية لتحديد العنصر الأول للزوج والعنصر الثاني له .

في هذه الحالة نقول إن الزوج مرتب فالأعداد مثلاً غالباً ما تذكر بترتيب معين وفق المبدأ التالي : يذكر أولاً العدد الصغير ثم العدد الكبير، ومن الممكن أن يكون الترتيب بشكل آخر مغاير. أما الأحرف فتكتب عادة وفق ترتيبها الهجائي، وقد تكتب وفق ترتيب آخر. وكقاعدة عامة، فإن الزوج المرتب يكتب ضمن قوسين صغيرين كمايلي :

(٣، ٥) (٦، ٨) (س، ع) (ب، ح)

4. حاول الآن أن تتحقق من أن الزوج غير المرتب هو مجموعة مؤلفة من عنصرين، بينما الزوج المرتب ليس مجموعة مؤلفة من عنصرين في الحالة العامة.

ثم أجب على السؤال التالي :

5. أي من الأزواج التالية أزواج مرتبة :

قبعنان ، زوج أحذية .

واضح الآن أن الزوج المرتب (ب، ج) يختلف عن الزوج

(ج، ب) أي أن (ب، ج)  $\neq$  (ج، ب)

إذا كانت ب  $\neq$  ج .

أما المثال الذي يوضح بدقة استخدام الأزواج المرتبة (الشائيات) في جملة الإحداثيات : حيث ...

س - وما « جملة الإحداثيات » ؟

ح - جملة الإحداثيات مؤلفة من محورين للأعداد، حيث

س - وما « محور الأعداد » ؟

ج - ألا تعرف محور الأعداد أيضاً؟ أم أنك قررت أن تصعب الوقت بمثل هذه

الاسئلة؟ حسن. سوف أفسر لك ما محور الأعداد، وما جملة الإحداثيات

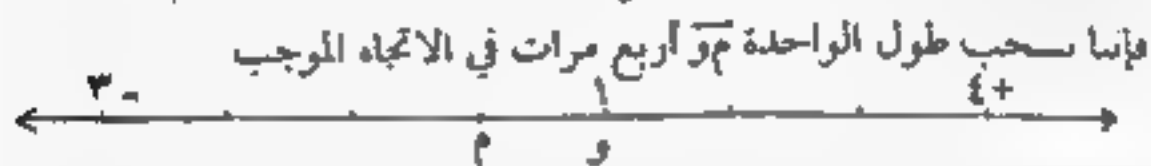
أملاً ألا تسألني بعد ذلك : ما المحور؟

محور الأعداد « أو مستقيم الأعداد » هو مستقيم عُلّم بنقطتين نقطة البداية

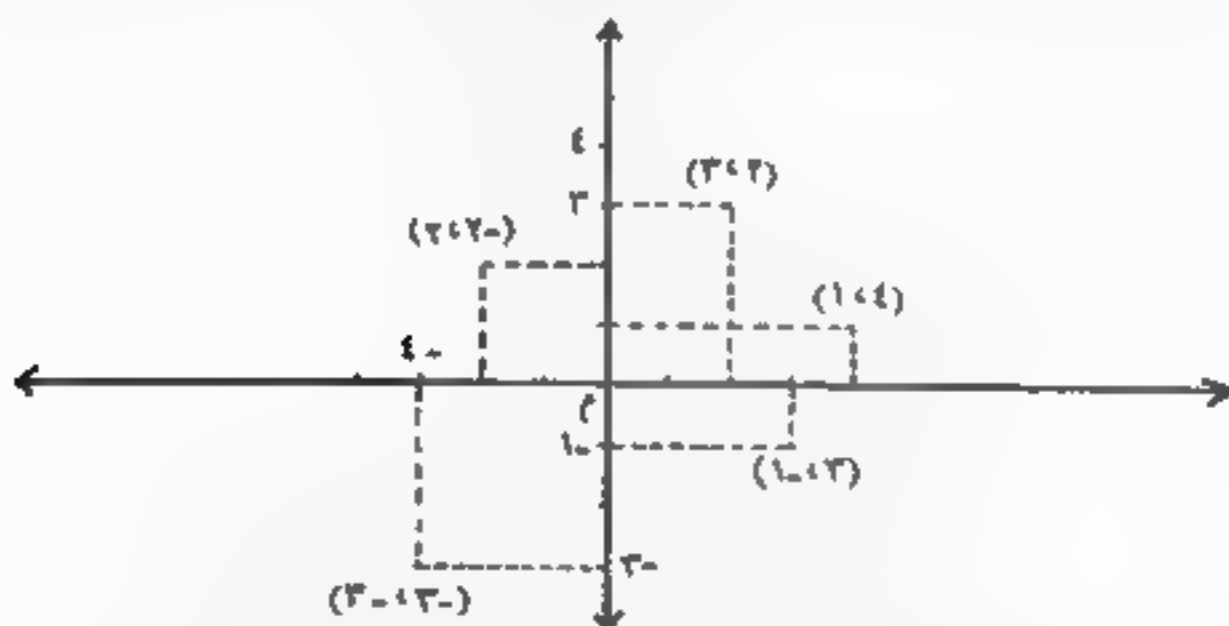
ونرمز لها عادة بالرمز  $m$ ، نقطة الواحدة  $1$  و.

هاتان النقطتان المحددان واحدة الأطوال  $\overline{MO}$ . أما الاتجاه من  $M$  إلى  $O$  فيؤخذ كاتجاه موجب والاتجاه المعاكس له يؤخذ كاتجاه سالب على محور الأعداد. وهناك علاقة بين نقاط محور الأعداد والأعداد، حيث إن كل نقطة تقابل عدداً واحداً فقط، وكل عدد يقابله نقطة واحدة من محور الأعداد.

مثلاً: إذا أردنا أن نحدد النقطة التي توافق العدد  $+4$  على مستقيم الأعداد،



أما النقطة التي توافق العدد  $-3$  فنحصل عليها بسحب واحدة الأطوال ثلاث مرات بالاتجاه المعاكس اعتباراً من نقطة البدء. أما جملة الإحداثيات فهي عبارة عن محورين للأعداد لها نفس نقطة البداية. وإذا كان المحوران متعامدين، فإن الجملة نسميها جملة إحداثيات متعامدة. نتمن الآن في الرسم التالي وأخبرني ماذا يمثل هذا الشكل:



س - هنا توحد مجموعة من الأزواج المرتبة من أعداد ونقاط.

ح - هذا صحيح . إن جملة الإحداثيات (الموضحة بالرسم) تحدد العلاقة بين مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد ونقاط المستوى وفق المبدأ التالي كل

• نستخدم المترجمة كلمة «واحدة» حيث نستخدم بها «كلمة واحدة» (المحرر)

روح مرتب (ثنائية) من الأعداد يتوافق نقطة واحدة فقط من المستوى وبالعكس . .

س - وبالعكس - كل نقطة من المستوى تتوافق زوجاً، زوجاً واحداً مرتباً من الأعداد

ج - وهذا هو الاستخدام الهام جداً للأرواح المرتبة . إن محور الأعداد وحدة الإحداثيات هي جسر خاص يربط ما بين الأعداد والنقاط ، أي جسر خاص وهام يربط ما بين الحساب والهندسة .

س - وهل لجملة الإحداثيات هذا الدور الهام في الرياضيات؟

ج - إنها لا تلعب دوراً هاماً فحسب ، بل يعد اكتشافها (أو ابتكارها) بداية عهد جديد في الرياضيات .

س - إذن جملة الإحداثيات أهم بكثير مما يمكن أن نتصور ولكن ما المراحل الأساسية في تاريخ الرياضيات بشكل عام؟ .

ج - لقد ميز أحد الرياضيين المشهورين في العصر الحديث وهو . آ . ن . كولماغورف (٦) - أربع مراحل لتطور علم الرياضيات وهي :

١ - المرحلة الأولى : وتمتد منذ بداية ظهور الرياضيات كعلم في العهود القديمة حتى أواسط القرن السادس عشر ، أي حتى كشف ديكارت (٧) للهندسة التحليلية . وقد تشكلت في هذا العهد المفاهيم الأساسية للهندسة والحساب ووصلت الرياضيات إلى مستوى عال من التجريد وخاصة في أعمال أرخميدس وإقليدس . وما يميز هذه المرحلة هو الرياضيات «الإحصائية» ذلك أنها عالجت بصورة أساسية المقادير الثابتة والإنشاءات الهندسية

٢ - المرحلة الثانية : وتبدأ بكشف ديكارت لجملة الإحداثيات والمقادير المتحركة وتنتهي حوالي أواسط القرن التاسع عشر .

(٦) اندريه بيكولايمش كولماغورف (١٩٠٢) - عالم رياضيات سوفيتي شهير Kolmagorf A.n

(٧) رينيه ديكارت (١٥٩٦ - ١٦٥٠) - فيلسوف رياضي وفيزيائي فرنسي Descartes R.

وقد تطورت في هذه المرحلة وبشكل كبير مفاهيم الناحية (الدالة) والتحويلات الهندسية.

٣ - المرحلة الثالثة : وتبدأ حوالي الستينات من القرن التاسع عشر وتمتد حتى الثلاثينات من القرن العشرين وتنصف هذه المرحلة بعظمة دور نظرية المجموعات والمطلق الرياضي فيها.

٤ - المرحلة الرابعة : وهي المرحلة المعاصرة وقد تجاوزت الخمسين عاما حتى الآن وقد بدأت هذه المرحلة - كما يؤكد كولماغوروف - بظهور الآلات الحاسبة التي أعطت الرياضيات ميزة خاصة. وتطور الجبر المجرد والتبولوجيا والمطلق الرياضي بشكل كبير. وبصورة عامة فقد اكتسبت المجالات المجردة للمعارف الرياضية أهمية كبيرة. وفي نفس الوقت فإن هذه المرحلة بالذات تتميز بالتقارب ما بين الرياضيات النظرية والتطبيقية، طالما أن أعقد النظريات الرياضية المحددة تجد تطبيقا لها في حل مختلف المسائل التطبيقية بفصل الآلات الحاسبة الالكترونية. وفي هذه المرحلة أيضا أصبح «تاريخ الرياضيات» مادة مستقلة بداتها.

لنتوقف هنا ونترك تاريخ الرياضيات، ولنعُد إلى مجموعتنا التي ندرسها ولنتعرف على استخدام آخر للأزواج المرتبة وذلك في عملية ضرب المجموعات.

### حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين :

اعلم أنه عندما تقرأ هذا العنوان سوف تقول لنفسك : «ها هي ذات تسمية غريبة أخرى. ألم يكن من الأفضل أن يقول ببساطة (حاصل ضرب) مجموعتين؟» إذ أنني أرى أن مصطلح (ديكارتي) لا يشرب أي شيء حديد ولكن يدور أن هذا المصطلح ينحني وراءه حديعة أو (مقلبا) ما. انظر إلى أي درجة تحب الرياضيات تعقيد الأمور.

ج - حس أنا أدرك ما يدور في ذهنك من تساؤلات. وسوف أقسر لك هذه التسمية وهذا المفهوم باستخدام مجموعة من التمارين، وبعد ذلك سوف بصوغ معا تعريف (الحاصل) الديكارتي لمجموعتين. (أنا لست متأكدا

بالطبع من أن هذه هي أفضل الطرق لتوضيح هذا المفهوم وصياغته. فقد يكون من الأفضل أن نبدأ بالتعريف وبعد ذلك نعرض عددا من الأمثلة. إن بعض المدرسين يفضلون الطريقة الأولى، وبعضهم يقول إن الطريقة الثانية هي الأفضل). لنأخذ مجموعتين (س، ع) ونختارهما بحيث لا تحويان عددا كبيرا من العناصر (وذلك يهدف التبسيط فقط وعدم الكتانة كثيرا). ولتكن س مؤلفة مثلا من دائرة ونجمة فقط والمجموعة ع مؤلفة من مثلث ومربع ومستطيل أي:

$$س = (O, *) \quad ع = (\Delta, \square, \square)$$

لنحول الآن عناصر المجموعتين إلى أرواح مرتبة بالشكل التالي:  
العنصر الأول (أو المسقط الأول) لكل زوج نأخذه من المجموعة س والعنصر الثاني (أو المسقط الثاني) لكل زوج نأخذه من المجموعة ع فحصل على الأزواج المرتبة (الثنائيات) التالية.

$$(O, \Delta), (O, \square), (O, \square) \quad \text{إذا كان العنصر الأول هو الدائرة}$$

$$(*, \Delta), (*, \square), (*, \square) \quad \text{العنصر الأول هو النجمة}$$

لشكل الآن مجموعة عناصرها هي هذه الأرواح المرتبة.

$$\left\{ (O, \Delta), (O, \square), (O, \square), (*, \Delta), (*, \square), (*, \square) \right\}$$

هذه المجموعة الجديدة التي حصلنا عليها تسمى الجداء (الحاصل الديكارتي

للمجموعتين س وع ويرمز لها بـ  $س \times ع$

س - هل هذا كل شيء عن الجداء (الحاصل) الديكارتي لمجموعتين؟

ج - نعم

ج - المفهوم ليس معقدا كما يوقع. لقد توقعنا أسوأ من ذلك



ج - نعم المفهوم ليس معقدا هل تستطيع أن تجد بنفسك الجداء الديكارتي للمجموعتين .

ص = (قلم، مسطرة) ك = (دفتر، كتاب)

س - نعم أستطيع ذلك . إن الجداء هو :

ص × ك = {(قلم، دفتر)، (قلم، كتاب)، (مسطرة، دفتر)، (مسطرة، كتاب)}

ج - هل تستطيع أن تجد الجداء ك × ص ؟

س - نعم . ها هو ذا الجداء المطلوب :

ك × ص = {(دفتر، قلم)، (دفتر، مسطرة)، (كتاب، قلم)، (كتاب، مسطرة)}

ج - هذا صحيح اكتب معي الآن هذه الاسئلة وحاول الإجابة عليها بمفردك :

٦ - هل المجموعتان ص × ك ، ك × ص متساويتان؟ فسر ذلك

٧ - هل المجموعتان ص × ك ، ك × ص متكافئتان في القدرة (x) ؟ فسر ذلك .

٨ - عرف المجموعتين ص × ص ثم ك × ك .

٩ - ما العلاقة بين عدد عناصر المجموعتين ص و ك وعدد عناصر الجداء الديكارتي لهما ص × ك ؟

س - آه ما أكثر هذه الأسئلة . أما لن أتمكن من الإجابة عليها بسرعة .

ج - لا بأس . أما لاهتم كثيرا بالوقت . ما يعني هو أن تعمل وتحصل على الإجابة الصحيحة (الأسئلة لك عزيزي القارئ)

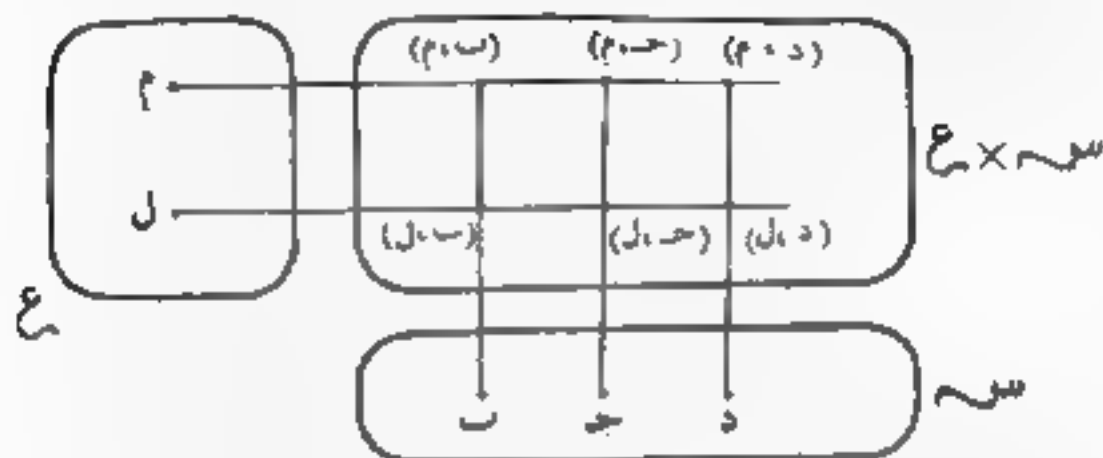
س - وهل يمكن تمثيل الجداء الديكارتي بالرسوم ؟

(x) تكون المجموعتان متكافئتين بالقدرة إذا كان لهما نفس العدد من العناصر

هذا التعريف يخدم أغراضا محدودة، إذ تكون المجموعتان متكافئتين أو مسابقتين بالقدرة إذا أمكن إيجاد تطبيق يكون تقابلا بينها. (ملحوظ)

ح - نعم يمكن تمثيل الحداء الديكارتي بالرسوم ولكي أتعبت كيف لم تسأل عن هذا قبل الآن؟ (أرى أنك لم تهتم بالتعريف الرياضي للحداء وإنما كل ما يهيمك هو تمثيله بالرسوم!) سوف أمثل لك بالرسوم الحداء المجموعتين.

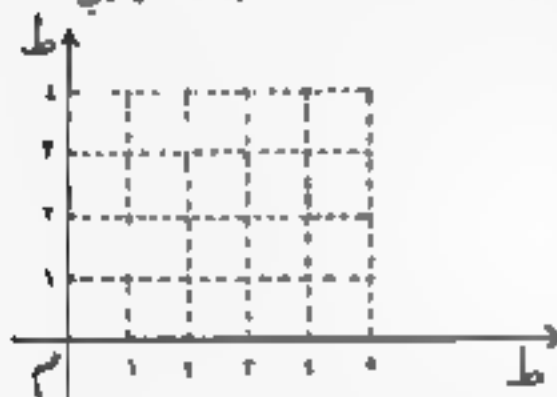
$$س = \{ب، ح، د\} \times ع = \{م، ل\}$$



• وإذا أخذنا الأعداد الطبيعية  $ط = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  فإن الحداء

الديكارتي  $ط \times ط$  له أهمية خاصة.

فهذا الحداء مجوي - بالطبع - عددا لا نهائيا من الأزواج المرتبة، ونحن نستطيع أن نمثله بواسطة شبكة نقاطها تمثل أزواجا ذات أعداد طبيعية كما يلي:



وإذا أخذنا أي زوج من الأعداد

الطبيعية فسوف نجده حتما في هذه

الشبكة، وإذا تصورنا مثل هذه

الشبكة، التي تحوي كل الأزواج

الممكنة من الأعداد

الطبيعية فإنه يصبح واضحا لدينا أنه يمكن اعتبار حداء الأعداد ناعما

(تطبيقا) مطلقه (محال) هذه الشبكة أي المجموعة  $ط \times ط$  ومستقرة (محال

مقابل) هو المجموعة  $ط$  نفسها أي أن (حاصل ضرب) الأعداد هو الناتج

$ط \times ط$  ويمكن أن نفسر هذا الحداء بالشكل إن كل زوج

• لا يعتبر المزالف (الصفر) عددا طبيعيا، والعصية عرض اتفاق

(المحرر)

مرتبة (ب، ج)  $\exists$  ط  $\times$  ط يوافق عددا طبيعيا عددا و نسميه  
جداء (حاصل ضرب) العددين ب، ج أي  $\exists$  ب  $\bullet$  ج مثلا:  
الجداء  $8 \times 7$  يفهم كقطة من ط التي توافق العنصر (8، 7) من ط  $\times$  ط  
وهو العدد الطبيعي 56 من المجموعة ط.

اعتقد أنه حان الوقت لصياغة التعريف الرياضي للجداء الديكارتي،  
لمجموعتين (حق بدون أن تسأل عنه):

وإن (الحاصل) الديكارتي للمجموعتين س- و ع هي مجموعة جميع الأزواج  
المرتبة، (أو الشائيات) (ب، ج) التي يكون فيها المسقط الأول ب عنصرا  
من المجموعة س-، والمسقط الثاني ج عنصرا من المجموعة ع). وإذا طلب  
إليك أحد الرياضيين أن تكتب تعريف الجداء الديكارتي لمجموعتين،  
عندئذ تأخذ ورقة قلميا وتكتب مايلي:

س-  $\times$  ع = {(ب، ج): ب  $\in$  س- و ج  $\in$  ع} وتقول لنفسك (واست تكتب)  
مايلي:

(الحاصل) الديكارتي للمجموعتين س- و ع هو مجموعة كل الأزواج المرتبة  
(ب، ج) التي تحقق الخاصة: ب عنصر من المجموعة س- و ج عنصر من  
المجموعة ع).

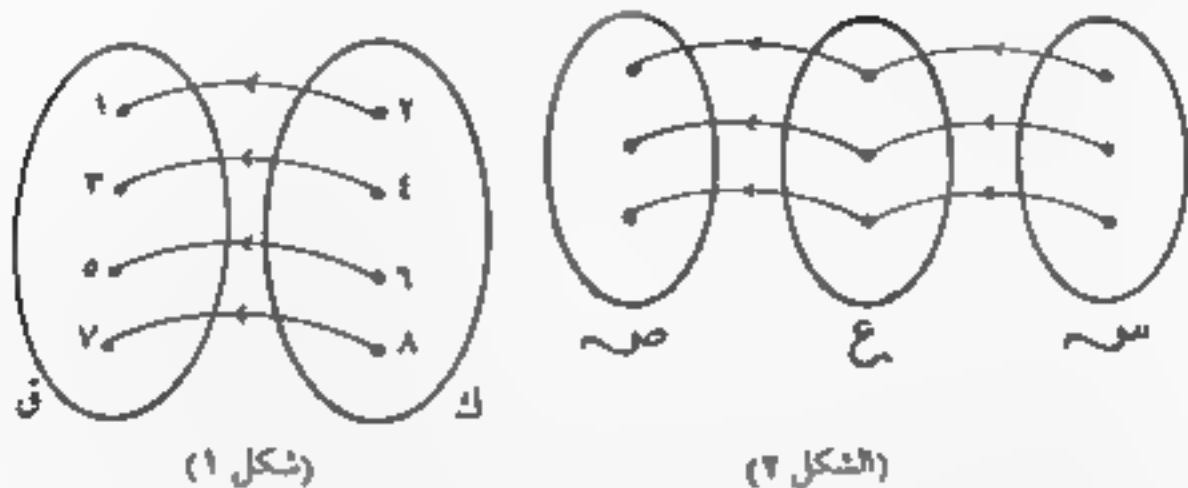
### المجموعة والأعداد:

س- هل هناك علاقة بين المجموعات والأعداد؟  
س- بالتأكيد هناك علاقة. لتذكر مثلا المجموعات المتكافئة أو المتساوية بالقدرة،  
كيف عرفناها؟

ج- هي المجموعات التي يمكن أن تجري فيها بينها تقابلا ١ - ١

ح- أعطني أمثلة على المجموعات المتكافئة.

ح- في الشكل ١ المجموعتان ك، ق متساويتان في الشكل ٢ المجموعات س-، ع،  
ص- متكافئة



(شكل ١)

(الشكل ٢)

ح - الأمثلة صحيحة، إذن لم يس بعد ما المجموعات المتكافئة. وهكذا فنحن نلاحظ أنه توجد صفة مشتركة بين المجموعات المتكافئة هي المثال الأول (شكل ١) ملاحظ أن للمجموعتين ك، ق نفس العدد من العناصر. وكذلك في المثال (الشكل ٢) للمجموعات ص، ع، س نفس العدد من العناصر. ويقول عادة إن للمجموعتين ك، ق نفس القدرة (وكذلك للمجموعات ص، ع، س نفس القدرة) أو نقول إن لها نفس العدد الرئيس.

س - وهل توجد أعداد غير الأعداد الرئيسة؟

ح - بالتأكيد نعم نميز بين الأعداد الرئيسة والأعداد الترتيبية البسيطة فالعدد الرئيس هو إجابة على السؤال كم عنصرا تحوي المجموعة؟ (نقول مثلا إن المجموعة ك (في الشكل ١) تحوي ٤ عناصر. فالعدد الرئيس لها هو ٤) أما العدد الترتيبي البسيط فهو إجابة على السؤال. ما ترتيبه؟ (مثلا

ما ترتيب العنصر أ في المجموعة {أ، ب، ج}؟

العنصر أ ترتيبه الأول

العنصر ب ترتيبه الثاني

من هنا نستنتج أن ١، ٢، ٣، ٤ ... أعداد رئيسة

بينما الأول الثاني الثالث ... أعداد ترتيبية بسيطة.

لنعد إلى مثالينا في الشكلين ١، ٢ ما الأعداد الرئيسة هنا؟

ج - أربعة : ثلاثة .

ج - هذا صحيح . لتعرف الآن على رمز رياضي حديث . نمر بلغة الرياضيات المعاصرة لرئيسي المجموعة  $\pi$  بالرمز  $\pi$  (س) فهي المثالين السابقين يكون لدينا :

$$\pi(\kappa) = \pi(\varphi) = 4$$

$$\pi(\nu) = \pi(\epsilon) = \pi(\mu) = 3$$

والعدد الرئيس لكل مجموعة مؤلفة من عنصر واحد هو الواحد

والعدد الرئيس لكل مجموعة مؤلفة من ثلاثة عناصر هو 3

ما العدد الرئيس للمجموعة الخالية؟

ج - الصفر .

س - وكيف نكتب هذا؟

ج - بهذا الشكل  $\pi(\emptyset)$  .

ج - صح . وما أنت ذا قد رأيت فائدة المجموعة الخالية ها

والآن هل الموضوع التالية واضحة تماماً لك : إن الأعداد الطبيعية أعداد

رئيسة لمجموعات منتهية .

ج - نعم . إن هذا يعني أن كل مجموعة منتهية تقابل عدداً طبعياً محدداً .

ج - جيد لقد حذرت .

س - لم أحذر ، ولكن فهمت .

ج - عموك . حقيقة إن هذا يعني أنك فهمت ما أقوله .

العلاقة بين العمليات على المجموعات والعمليات على الأعداد :

ج - إذا كنت قد فهمت العلاقة بين المجموعات والأعداد الطبيعية فلن تجد أي

صعوبة في فهم العلاقة بين العمليات على المجموعات والعمليات على

الأعداد ، أي العلاقة بين اجتماع (اتحاد) المجموعات وجمع الأعداد الطبيعية

- المجموعة المتمة والأعداد الطبيعية . . . . .

س - يبدو لي أنه توجد علاقة بين هذه العمليات ولكي لا أعرف بدقة ماهي العلاقة؟

ح - العلاقة بينها بسيطة جدا. وسوف نتأكد من ذلك بنفسك لبدأ باجتماع المجموعات وجمع الأعداد الطبيعية.

إذا كان لدينا مجموعتان متاهتين  $S$  و  $E$  فإننا نستطيع أن نتأكد بسهولة أن  $n(S \cup E) = n(S) + n(E) - n(S \cap E)$   $n(S \cap E)$  =  $n(S) + n(E) - n(S \cap E)$  وبعبارة أخرى: مجموع رئيس مجموعة اجتماع  $S$  و  $E$  مع رئيس مجموعة تقاطعها تساوي مجموع رئيس المجموعتين  $S$  و  $E$ .

س - هذا ليس بسيطاً كما صورته لي. هل يمكنك توضيح ماقلته بمثال محدد؟  
ج - إليك هذا المثال:

لنفرض  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و  $E = \{4, 5, 6, 7\}$   
هل نستطيع أن نجد اجتماع  $S$  و  $E$  وتقاطعها ثم رئيس مجموعة الاجتماع ومجموعة التقاطع ورئيس كل من  $S$  و  $E$ ؟

س - نعم أستطيع ذلك. وهذا هو الجواب:

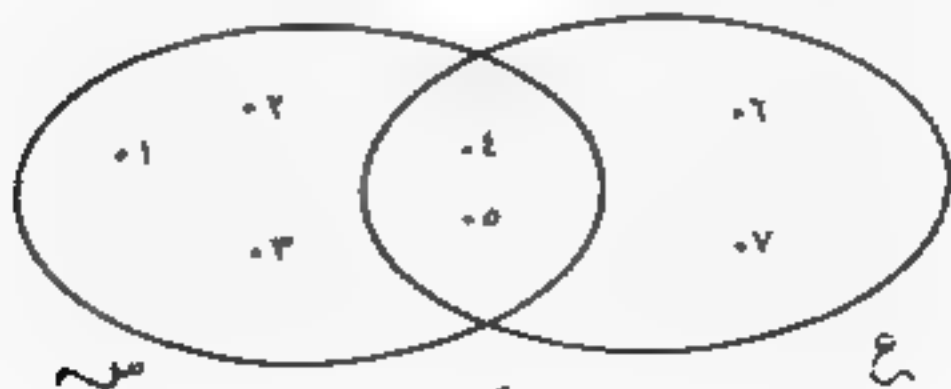
$$n(S \cup E) = n(S) + n(E) - n(S \cap E)$$

$$n(S \cap E) = n(S) + n(E) - n(S \cup E)$$

$$n(S \cup E) = 7 + 4 - 2 = 9$$

$$n(S \cap E) = 2 + 4 - 9 = -3$$

أستطيع أن أمثل أيضاً هاتين المجموعتين بمخطط كما يلي:



شكل ٣

ج - هذا صحيح بقي لدينا الآن التأكد من صحة العلاقة (١) لهذا المثال.

س - وكيف نتأكد من صحتها؟

بح طريقة التعويض نعوض رئيس المجموعة التي حصلنا عليها في العلاقة (١)

س - سوف أعوض وأرى ماذا ينشأ : العلاقة (١) هي

$$m(m \cup E) = m(m \cap E) + m(m \cap E) = m(m \cap E) + m(m \cap E)$$

$$4 + 5 = 2 + 7$$

$$9 = 9 \text{ وهذا صحيح}$$

ج - وإذا استعضنا عن المجموعتين س، ع بأي مجموعتين منتهيتين وجدنا أن

العلاقة (١) صحيحة أيضا ويمكنك أن تتأكد من ذلك بنفسك.

فالعلاقة (١) هي العلاقة بين الاجتماع والجمع . غير أنه توجد حالة مهمة

وممتعة نفس الوقت . وهي الحالة التي يكون فيها تقاطع س، ع مجموعة

خالية . عندئذ يكون :

$$m(m \cap E) = m(m \cap E) = 0 \text{ والمساواة (١) تصبح}$$

$$m(m \cup E) = m(m \cap E) + m(m \cap E) \quad (2)$$

وهذه المساواة هي حالة خاصة من المساواة (١) ، يمكن أن يصوغ هذه الحالة

الخاصة بالشكل :

إذا لم يكن بين المجموعتين س، ع عناصر مشتركة فإن رئيس اجتماع

المجموعتين يساوي مجموع رئيس المجموعتين . حاول أن تعطي مثالا على

هذه الحالة الخاصة :

$$س - حسن . لنأخذ مثلاً س = {٢، ٤، ٦، ٨} ع = {١، ٣، ٥، ٧، ٩}$$

$$m(m \cap E) = 0$$

$$m(m \cup E) = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}$$

$$m(m \cap E) = 0 \quad m(m \cap E) = 0 \quad 9 = m(m \cup E) \text{ لتأكد من صحة العلاقة}$$

$$m(m \cup E) = m(m \cap E) + m(m \cap E) \text{ وبالتعويض نجد أن : } 9 + 0 = 9$$

٩ = ٩ والعلاقة صحيحة.

ج - جيد وإن كان من الخطأ أن نصوغ نتيجة عامة استنادا إلى مثال واحد. لذا يجب عليك أن تتأكد من صحة العلاقة بنفسك بطرح أمثلة أخرى مختلفة. لير الآن العلاقة بين الفرق بين مجموعتين منتهيتين وعملية الطرح من أجل أي مجموعتين  $S, E$  منتهيتين، تكون العلاقة التالية صحيحة.

$S \setminus E = (S \setminus E) \cup (E \setminus S) - (E \setminus S) = (S \setminus E) \cup (E \setminus S) - (E \setminus S)$  أي أن رئيس الفرق  $S \setminus E$  يساوي حاصل طرح رئيس مجموعة التقاطع من رئيس المجموعة الأولى  $S$ . ولتوضح العلاقة وتؤكد من صحتها بمثال:

$$\text{لدينا: } S \setminus E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{6, 7, 8, 9\} = \{2, 3, 4, 5\}$$



شكل 4

$$S \setminus E = \{2, 3, 4, 5\} \setminus \{6, 7\} = \{2, 3, 4, 5\}$$

هل نستطيع أن نجد رئيس كل من المجموعات الموجودة في العلاقة (3)؟

س - يمكننا ذلك بسهولة وبسرعة. هذه هي الإجابات:

$$S \setminus E = \{2, 3, 4, 5\} \setminus \{6, 7\} = \{2, 3, 4, 5\}, \quad E \setminus S = \{6, 7\} \setminus \{2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\}$$

ج - ماذا سنفعل بعد ذلك؟!

ح - سوف نتحقق من صحة العلاقة (3)

ج - هذا صحيح. لتتحقق من ذلك معا.

س - نكتب أولا المساواة (3) وبعد ذلك نكتب الأعداد الموافقة.

$$S \setminus E = (S \setminus E) \cup (E \setminus S) - (E \setminus S)$$

$$2 - 6 = 4$$

$$4 = 4 \text{ وهذا صحيح}$$

ج - حسن. ها أنت قد تأكدت من صحة العلاقة (3) بنفسك ورأيت أنني

لا أخدعك. والان انتبه إلى أنه توجد ها أيضا حالة خاصة جدا لفهم

العلاقة بين فرق مجموعتين وطرح الأعداد:

$$= 84 =$$



إذا كانت - كحالة خاصة -  $E$  مجموعة جزئية من المجموعة  $S$  أي  $E \subseteq S$  فما مجموعة تقاطع  $S$  و  $E$  أي ما المجموعة  $S \cap E$  ؟

ج - لحظة من فضلك (دعني أتذكر تعريف تقاطع مجموعتين).

تقاطع مجموعتين هو مجموعة مزلفة من العناصر المشتركة بين المجموعتين فإذا كانت  $E$  محتواة في  $S$  فهذا يعني أن جميع عناصر  $E$  هي في نفس الوقت عناصر في المجموعة  $S$ .

نعم إذا كان  $E \subseteq S$  فإن  $S \cap E = E$ .

س - صحيح ولكن الحق يقال إنك احتجت وقتا ليس بالقليل لكي نتذكر تعريف تقاطع مجموعتين، لأناس مادمت قد تذكرته بشكل صحيح. وهكذا فإذا كان  $S \cap E = E$  هل نثبت  $S \cap (S \cap E) = (S \cap E)$  فكيف سنصبح العلاقة (3) في هذه الحالة؟ أي كيف سنكتب المساواة:  $S \cap (S \cap E) = S \cap E$  ؟

ج - سوف نكتبها بالشكل التالي:  $S \cap (S \cap E) = S \cap E$ .

ج - جيد والآن يجب ألا ننسى أنه:

إذا كانت  $E \subseteq S$  حيث  $S$  مجموعة منتهية فإن رئيس الفرق للمجموعتين  $S$  و  $E$  يساوي الفرق بين رئيس المجموعتين  $S$  و  $E$  لتتحقق من هذه الحالة الخاصة بمثال: لدينا

$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و  $E = \{4, 5, 6\}$  واضح أن  $E \subseteq S$  فما الفرق بين المجموعتين  $S$  و  $E$  ؟

س - الفرق هو:  $S \setminus E = \{2, 3, 7\}$

ج - والآن لتتحقق من صحة المساواة:  $S \cap (S \setminus E) = S \setminus E$  لنحدد أولا عناصر هذه المساواة:

$S \cap (S \setminus E) = S \cap \{2, 3, 7\} = \{2, 3, 7\}$  نعوض في المساواة نجد:  $3 = 3$  وهذه العلاقة صحيحة. استنادا لذلك (والأمثلة كثيرة يمكن أن

تطرحها لنفسك) يمكن أن نتوصل إلى النتيجة التالية إن عمليات الاجتماع (الاتحاد) والفرق بين المجموعات تتميز بأنها أكثر اتساعاً وشمولاً من عمليات الجمع والطرح على الأعداد. إذ أنه في حالات خاصة فقط، وعندما تتحقق خاصية معينة (مثلاً  $a - a = 0$ ) .

يمكن أن يحول الاجتماع (الاتحاد) إلى جمع، والفرق إلى طرح (عندما  $a - a = 0$ )

وميزة الاتساع والشمولية للعمليات على المجموعات هي التي نعطيها الأهمية الكبرى في الرياضيات المعاصرة. وعناصر المجموعة يمكن أن تكون غير عددية وإنما تحمل مفاهيم أخرى رياضية مثل: نقطة، شعاع، تابع (تطبيق) . . . . أو مفاهيم غير رياضية وهذا ما دعا العالم الرياضي الشهير لوزين (٨) إلى صياغة العبارة التالية:

«إن عناصر المجموعة يمكن أن تكون أشياء مختلفة: كلمات، ذرات، أعداد، توابع، نقاط، زوايا، . . . وغيرها. ولذلك فقد كان واضحاً منذ البداية التوسع الكبير الذي تتميز فيه نظرية المجموعات وإمكانية استخدامها في مجالات كثيرة للمعرفة (في الرياضيات والكيمياء والفيزياء . . . .»

س - حسن لقد فهمنا الآن العلاقة بين اجتماع المجموعات وجمع الأعداد، وبين فرق المجموعتين وطرح الأعداد. فما العلاقة بين الحداء (الحاصل) الديكارتي لمجموعتين وضرب الأعداد؟ وماذا تتصف هذه العلاقة؟

ج - هذا ما أردت أن أوضحه لك أيضاً. ولبدأ بالأمثلة التوضيحية - لدينا المجموعتان  $S = \{1, 2, 3\}$  و  $E = \{1\}$  لنكتب الحداء الديكارتي هما.

$$S \times E = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$$

٨ - نقولا بقولا يفتش لورين (١٨٨٣ - ١٩٥٠) عالم رياضيات روسي

لنجد الآن الأعداد الرئيسة للمجموعات الثلاث. واضح أن:

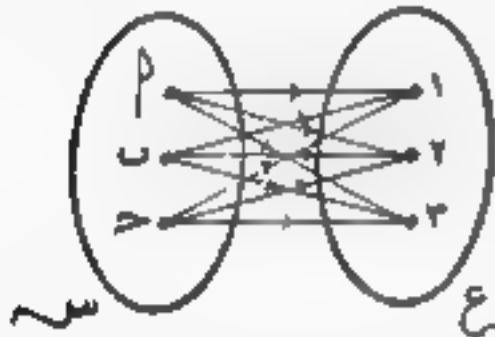
$$1 = (س) \quad 2 = (ع) \quad 3 = (س \times ع)$$

والعلاقة التالية:  $(س \times ع) = (س) \times (ع)$  صحيحة مثال آخر:

$$\text{لدينا المجموعتان } س = \{1, 2, 3\} \quad ع = \{1, 2, 3\}$$

$$س \times ع = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

والأعداد الرئيسة في هذه الحالة للمجموعات الثلاث هي  $3 = (س)$   
 $3 = (ع)$   $3 \times 3 = 9$  وهذا أيضا لدينا  $(س \times ع) = (س) \times (ع)$   
 $3 \times 3 = 9$



ذلك أنه: لتوضح الحداء بالمخطط التالي:

كما نرى في المخطط فإن عدد الأسهم  
 يساوي رئيس الحداء الديكارتي للمجموعتين  
 س، ع أي أن تعدادا

بسيطا لعدد الأسهم يسمح لنا بتحديد العدد الموافق للحداء الديكارتي  
 للمجموعتين، وهذا ما رأيناه في المثالين السابقين.

ويمكن أن نفهم هذه القاعدة بالشكل التالي. إذا كان  $(س)$ ،  $(ع)$   
 رئيس المجموعتين س، ع فإن جداء هذين العددين يحدد رئيس الحداء  
 الديكارتي للمجموعتين س، ع. أي أن  
 $(س \times ع) = (س) \times (ع)$

وهذا صحيح من أجل أي مجموعتين (وبإمكانك التأكد من ذلك بالأمثلة).

ج - إن هذا الحداء معقد جدا.

ج - أما أنتفق معك في أنه جداء غير بسيط.

س - هل يعني كل هذا أنه لصرب ٣٩ في ٦٧ مثلا يجب أن أجد رئيس الحداء  
 الديكارتي للمجموعتين س (التي رئيسها = ٣٩) وع (التي رئيسها = ٦٧)؟

أي يجب أن أحد عدد الأسهم في الحداء الديكارتي صحيح؟

ج - نعم . نماما هذا مانفعله أن نستطيع أن نرسم مجموعة تحوي ٣٩ عنصرا، وأخرى تحوي ٦٧ عنصرا، وتربط عناصر المجموعة الأولى بكل عناصر المجموعة الثانية بواسطة الأسهم ثم تعد هذه الأسهم

ح - شكرا على هذه النصيحة . أري أنه من الأفضل أن أصرب الأعداد بالطريقة التي تعلمتها سابقا .

ج - أنا لم أصحك بضرب الأعداد بهذه الطريقة . لقد أخبرتك فقط كيفية ضرب الأعداد بواسطة الحداء الديكارتي للمجموعات وليس من الضروري أن نستخدمه، غير أن العلاقة بين ضرب الأعداد والحداء الديكارتي للمجموعات يشعل دورا هاما جدا في نظرية المجموعات .

ج - إذا كان الأمر كذلك فليس لدي أي اعتراض، لأنني قد خشيت أن تحسب في المستقبل على ضرب الأعداد باستخدام الأزواج المرتبة للحداء الديكارتي للمجموعتين .

ج - لن يحدث شيء لو قمت بهذا العمل بهدف التمرين فقط، إذا لم يكن لديك متفعله، وإذا أردت تثبيت معارفك في مجال العمليات على المجموعات فإنك تستطيع ذلك بحل التمارين التالية:

١٠ - لتكن لدينا المجموعات:

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \quad E = \{1, 3, 5\} \quad H = \{2, 4, 6\}$$

هل المساواة من ١ - ١٠ إلى ١٦-١٠ في الجدول المرفق (١) صحيحة؟

$S \cap E = E \cap S$	١ - ١٠
$S \cup E = E \cup S$	٢ - ١٠
$S \cap (E \cap H) = (S \cap E) \cap H$	٣ - ١٠
$S \cup (E \cap H) = (S \cup E) \cap H$	٤ - ١٠
$S \cap S = S$	٥ - ١٠

$ص \cup ص = ص$	٦-١٠
$ص \cap (ع \cup ص) = (ص \cap ع) \cup (ص \cap ص)$	٧-١٠
$ص \cup (ع \cap ص) = (ص \cup ع) \cap (ص \cup ص)$	٨-١٠
$ص / (ع \cup ص) = (ص / ع) \cap (ص / ص)$	٩-١٠
$ص \cup (ع / ص) = (ص \cup ع) \cap (ص \cup ص)$	١٠-١٠
$ص / ع = ع / ص$	١١-١٠
$ص / ص = \emptyset$	١٢-١٠
$ص \times ع = ع \times ص$	١٣-١٠
$ص(ص \times ع) = (ص \times ع)ص$	١٤-١٠
$ص(ص) + ص(ع) = ص(ع \cup ص)$	١٥-١٠
$ص(ص / ع) = ص(ص) - ص(ص \cap ع)$	١٦-١٠

جدول (١)

١١- إذا كانت  $A$ ،  $B$ ،  $C$  أعداداً طبيعية، فهل المساواة في الجدول المرفق (٢)

صحيحة؟

$A \cup B = B \cup A$	١-١١
$A \cap B = B \cap A$	٢-١١
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	٣-١١
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	٤-١١
$A \cup A = A$	٥-١١
$A \cap A = A$	٦-١١
$A \cup (A \cap B) = A$	٧-١١
$A \cap (A \cup B) = A$	٨-١١
$A - (A \cap B) = A - B$	٩-١١
$A \cup (A - B) = A$	١٠-١١
$A - B = A - (A \cap B)$	١١-١١
$A - A = \emptyset$	١٢-١١

(تأكد من ذلك بإعطاء أ، ب، ج قيا محتله مثلا

$$1=أ \quad 2=ب \quad 3=ج \quad 4=د \dots$$

١٢ - قارن بين خواص العمليات على الأعداد (العلاقات من ١١ - ١ حتى ١١ - ١٢)، والعلاقة الموافقة بالنسبة للمجموعات في الجدول (١) وفسر كيف ترتبط الأولى بالثانية.

### المجموعة المرتبة والمجموعة المرتبة جيدا:

س - حسن . لقد استوعبنا شيئا ما عن التشابه بين المجموعات والأعداد والتشابه بين العمليات على المجموعات والعمليات على الأعداد وأصبح واضحا لدينا دور المجموعات . ولكننا لم نفهم ماذا يعني هذا العنوان الذي وضعته ، وهل بالإمكان ترتيب المجموعة ؟ أو هل يوجد بين المجموعات مجموعات غير مرتبة ها . . . ها . . . ها . . .

ج - لا مري ليس بهذا المعنى الذي همته من كلمة (الترتيب) لذلك قبل أن نتحدث عن المجموعات المرتبة والمجموعات المرتبة جيدا سوف نوضح هذا المفهوم . نقول عن المجموعة س إنها مرتبة فيما إذا أمكن معرفة تسلسل العناصر فيها : أي أنه إذا أعطينا عنصري ب ، ج من هذه المجموعة نستطيع أن نحدد تماما أي عنصر يقع قبل الآخر .

وفق هذا المفهوم تكون مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة مرتبة . ذلك أنه إذا أعطينا العددين ٤ ، ٥ من مجموعة الأعداد الطبيعية فنحن نستطيع أن نحدد تماما أن العدد ٤ يقع قبل العدد ٥ ومجموعة أيام الأسبوع هي مجموعة مرتبة .

ومجموعة أشهر السنة هي مجموعة مرتبة ومجموعة أحرف الأبجدية هي مجموعة مرتبة . وفي الرياضيات نميز بين المجموعات المرتبة والمجموعات المرتبة جيدا

س - وكيف نكون المجموعة مرتبة جيدا؟

ح - في الواقع أن كل المجموعات التي ذكرتها لك هي مجموعات مرتبة جيدا ،

ونكي تستوعب الفرق بين المجموعات المرتبة والمجموعة المرتبة جيدا أعرض عليك هذا المثال. نأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة التي يمكن تمثيلها على محور الأعداد كما في الشكل:



شكل ٦

هل هذه مجموعة مرتبة؟

ج - نعم. هذه مجموعة مرتبة.

س - وبماذا؟

س - لأننا إذا أعطينا أي عددين منها نستطيع أن نعرف أيها يقع قبل الآخر (أو أيها أصغر من الآخر).

ج - صحيح. إذا أحدهما أي عددين من المجموعة من فإن العدد الأكبر هو العدد الذي يقع إلى اليمين ومع ذلك فهناك فرق حقيقي وجوهري بين هذه المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية. هل لاحظت هذا الفرق؟

ج - الفرق بينهما؟ .. آه نحن لا نعرف العنصر الأصغر في المجموعة من

ج - صحيح. هذا هو جوهر الخلاف بين هذه المجموعات. لذلك نحن نقول إن المجموعة من مجموعة مرتبة وليست مرتبة جيدا. والمجموعة المرتبة جيدا هي تلك المجموعة التي تكون كل مجموعة جزئية منها غير فارغة ولها عنصر أصغر. هل فهمت الآن الفرق بين المجموعات المرتبة والمجموعات المرتبة جيدا؟

س - نعم لقد فهمت الفرق ولكن لم أهم بعد فائدة هذا المفهوم. ما حاجتنا للمجموعات المرتبة جيدا؟

ج - هذا المفهوم ضروري في الرياضيات لأسباب عديدة. أحد هذه الأسباب يتلخص في أنه نستطيع بواسطة هذا المفهوم تحديد ترتيب الأعداد (الأول، الثاني، الثالث، ...) وغير ذلك نستطيع ...

س - هل مازال هناك أشياء كثيرة ممتعة في المجموعات؟ ألم نعصر بعد كل شيء؟

ح - كلا نحن لم نقسر بعد كل شيء عن المجموعات . لقد تعرفنا فقط على بعض المفاهيم والرموز الأساسية التي تستخدم في نظرية المجموعات

س - وماذا يجب أن نعرف أيضا عن المجموعات؟

ح - يدولي أن أحدا لم يفهم الآخر تماما . فمن لم نباشر بعد بأي شيء حدي عن المجموعات ، حتى أننا لم نتعرف عليها كما يجب .

س - وماذا نسمي إذن كل هذا العمل الذي قمنا به حتى الآن؟ وهل يعتبر هذا قليلا لكي نفهم المجموعات؟

ج - أعود لأقول لك أننا قد تعرفنا فقط على بعض المفاهيم والرموز الأساسية والضرورية ، والتي يمكن استخدامها في كتب الرياضيات و... (في الواقع وأحق معه فهو قد شعر ببعض الملل . ولذلك فليس من الضروري مصابقته بالتتابع وعمليات بوليا على المجموعات والتعريف الرياضي لعلاقة الترتيب ومفهوم الزمرة والرمزة الجزئية... وفي الوقت الذي سوف يتعرف فيه على هذه المفاهيم من مصادر أخرى ، وإذا لم يتعرف عليها فهو قادر على الاستمرار في الحياة بشكل جيد بدون هذه المفاهيم . من الأفضل أن أغير موضوع الحديث ولحسن الحظ فإن علم الرياضيات عني بمحالات أخرى

(ممتعة)

### نظرية المجموعات (١):

يمكن التأكيد على أن الرياضيات والعلمة في كل الأزمنة قد استخدمت وبشكل واسع محكمات نظرية المجموعات بشكل أو بآخر . غير أنه - وعبر تاريخ تطور نظرتهم إلى هذه المادة (نظرية المجموعات) لابد من التمييز بدقة بين الأسئلة المرتبطة بمفاهيم الأعداد الرئيسة (والمرتبطة بصورة خاصة بمفاهيم اللانهاية) وبين الأسئلة المرتبطة فقط بمفاهيم الانتهاء والاحتواء . فمفاهيم الانتهاء ولاحتواء قابلة

(١) من كتاب بيكولا بور ماكن «أسس من تاريخ الرياضيات» موسكو ١٩٦٣ ص ٣٧ - ٣٨  
(Bourbaki N)



لنعمهم بالبداهة والخدمى، ولذلك فهى تبدو أنها لم تمر أبدا بطور من المناقشة والجدل حولها. وحتى نهاية القرن التاسع عشر لم يتعمق أحد في تعريف المجموعة. وعندما نشر كانتور تعريفه الشهير للمجموعة لم يلاق هذا لتعريف أي معارضة. ولكن ما إن أصبحت معاهيم الأعداد والمقادير لمعاهيم المجموعات حتى تغير الوضع تغيرا جذريا، فمسألة التقسيم اللانهائي للفراغ قد أدت - كما هو معروف - إلى تعقيدات ملحوظة في الفلسفة. ثم إنه لم يكن باستطاعة الرياضيات والعسفة إزالة ذلك التناقض الظاهري حول المقادير المنتهية والمؤلفة من عدد لانهائي من القط ذات المقادير المحدومة.



## الفصل الثاني الأعداد الطبيعية

- الأعداد الأولية وغير الأولية.
- ما عدد الأعداد الطبيعية؟
- في عالم اللانهايات.
- مجموعة الأعداد الطبيعية.
- المسلمات - قواعد اللعب.
- كيف يلعب الرياضيون؟
- العمليات الحسابية على الأعداد الطبيعية.
- محادثة حول الصفر.
- بضع كلمات أخرى عن بقية الأعداد.
- هل يمكن أن يكون  $10 + 10$  يساوي  $100$ ؟

## الأعداد الطبيعية :

عندما نقرأ العنوان سوف تتساءل بحية أمل ماذا يمكن أن تقول من جديد ومنع بالنسبة للأعداد الطبيعية؟ وقد تكون على حق بعض الشيء. ذلك أن أي إنسان - حتى وإن كان لا يدرس ولم يدرس الرياضيات - يعرف لأعداد الطبيعة جيداً. ولكن دعنا ألا نحاول معاً سق الأحداث. لأنك سوف تقنع قريباً أن الأعداد الطبيعية تستحق اهتماماً أكبر بكثير مما تعتقد حتى وإن كان لها عمر طويل نحسد عليه. لقد عرف الأعداد الطبيعية ودرسها فلاسفة العصور القديمة - فلاسفة اليونان - منذ أكثر من ألفي عام لدرجة أن نظرية المجموعات التي لها من العمر حوالي مئة عام فقط نعد طقلاً (غريباً) بالمقارنة معها. لذا والأعداد الطبيعية لا تستحق أن نقومها فقط بشكلها الخارجي المألوف لدينا والمنهر (أحياناً)، وحتى الرياضيون لم يتمكنوا خلال أكثر من ٢٠ قرناً من دراستها حتى النهاية. والأعداد الطبيعية بقدورها وبساطتها تذكرنا بأهرام مصر (والحق يقال إنها لا تعرف إلا الشيء القليل عن هذه الأهرام رغم الكثير من الكشف وحل الألغاز المتصلة بها).

والبدء بدراسة الأعداد الطبيعية مرتبط شجيرة هذه الأعداد إلى الأعداد لفردية والزوجية والتي تمت في اليونان القديمة. وهكذا... فالأعداد الزوجية هي ٢، ٤، ٦، ٨، ...

نكتب هذه المجموعة بواسطة الرموز. إنها مؤلفة من المجموعة:  $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ . هي أي عدد طبيعي، ط مجموعة الأعداد الطبيعية. ونكتب مجموعة الأعداد الفردية. ١، ٣، ٥، ٧، ... بالشكل.  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ . وهذه المجموعة تقرأ كما يلي:

(إذا أصفنا أو طرحنا من أي عدد طبيعي زوجي العدد ١ نحصل على عدد فردي). وبكي يدرك الأهمية التي أولاها اليونان لهذا التقسيم للأعداد الطبيعية يمكن أن تأمل التعريف الذي أعطاه الفيلسوف والرياضي اليوناني أملاطون (٤٢٧ - ٣٤٧ ق م) للرياضيات فقد سمي أفلاطون الرياضيات علم

خواص الأعداد المردية والزوجية .

لقد اظهر الرياضيون منذ القدم خواص وقوانين ممتعة للأعداد الطبيعية لذكر بعضها من هذه الخواص .

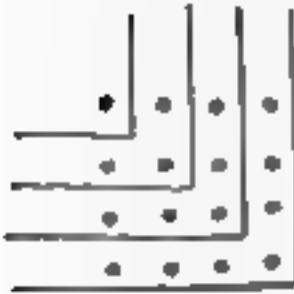
(١) مجموع الأعداد المردية المتتالية تساوي دوما مربع عدد طبيعي .

أي :

$$1^2 = 1 = 1 + 0$$

$$2^2 = 4 = 1 + 3$$

$$3^2 = 9 = 1 + 3 + 5$$



وبصورة عامة :

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$$

...	...	٦	٥	٤	٣	٢	١
...	...	١٢	١٠	٨	٦	٤	٢
...	...	١٨	١٥	١٢	٩	٦	٣
...	...	٢٤	٢٠	١٦	١٢	٨	٤
...	...	٣٠	٢٥	٢٠	١٥	١٠	٥
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

شكل ٨

(٢) إذا كتبنا جدول الصرب ضمن مربع مفتوح من الطرفين الأسفل والأسفل كما في الشكل ٨ نلاحظ أن عناصر الجدول الموصحة في قطر المربع لكبر هي مربعات الأعداد الطبيعية متتالية (عناصر القطر كما في الشكل ٨ هي ١، ٤، ٩، ١٦، ...).

وإذا حددنا عددين متتاليين على القطر (كعددين ١، ٤، أو ٤، ٩، أو ٩، ١٦) وحددنا أصغر مربع يحويهما فإن حاصل جميع الأعداد الأربعة التي تؤلف هذا المربع هو مربع عدد طبيعي (إذا كان العددين المتتاليان على القطر هما ٩، ١٦ فأصغر مربع يحويهما هو المربع الموصح على الشكل ويكون  $9 + 16 + 16 + 9 = 49 = 7^2$ ) وبفس الشكل نجد:

$$3^2 = 9 = 1^2 + 2 \times 2 + 1^2 \text{ أو } 3^2 = 9 = 1 + 2 + 2 + 1$$

$$5^2 = 25 = 1^2 + 3 \times 2 \times 2 + 3^2 \text{ أو } 5^2 = 25 = 1 + 4 + 4 + 4 + 1$$

هل تذكر هذه النتائج بالطفقة بـ ٢ + ٢ بـ ٢ جـ + جـ = (ب + جـ)؟ نعم هي نفسها.

(٣) إن حاصل جمع الأعداد البروجية ن الأولى تساوي (حاصل صرب) العددين متتاليين ن، ن + ١ أي جداء عدد هذه الأعداد بالعدد الثاني له

أمثلة



$$2 \times 2 = 4 = 1 + 1 \quad (2 = 2)$$


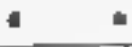


$$3 \times 3 = 9 = 1 + 4 + 4 \quad (3 = 3)$$

$$4 \times 4 = 16 = 1 + 4 + 4 + 7 \quad (4 = 4)$$

وبصورة عامة:

$$2 + 2 + 2 + \dots + 2 = 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n+1)$$

(٤) سمى اليونان مجاميع الأعداد الطبيعية من الواحد حتى  $n$  بأعداد المثلث، وذلك لأن هذه المجاميع يمكن تمثيلها بنقاط بشكل مثلث متساوي الاضلاع كما يلي:

	$1 = 1$
	$3 = 1 + 2$
	$6 = 1 + 2 + 3$
	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

وبصورة عامة

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ويمكن أن نلاحظ بسهولة وجود رابطة بسيطة بين مربعات الأعداد وبين أعداد المثلث. فمجموع عددين متتاليين من أعداد المثلث يساوي دوماً مربع عدد طبيعي

مثال (حل تم ١٣)

$$1^2 = 1 = 1$$

$$2^2 = 4 = 1 + 3$$

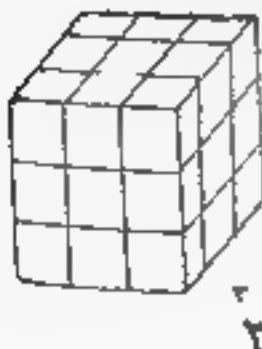
$$3^2 = 9 = 1 + 3 + 5$$

$$4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$$

وضح الحلول السابقة باستخدام الرسم.

(٥) كيف تشكل مكعبات الأعداد الطبيعية؟

يمكن أن نفهم كيفية تشكل المكعبات بسهولة وذلك باستخدام المكعبات أو بالرسم كما يلي في شكل ١٠:



(٦) وقد أطلق اليونان اسم الأعداد الكاملة أو المثالية على كل عدد طبيعي يساوي مجموع قواسمه الحقيقية مثلا الأعداد ٦ و ٢٨ هي أعدادا كاملة أو مثالية ذلك أن قواسم العدد ٦ الحقيقية هي ١، ٢، ٣، ثم إن  $1 + 2 + 3 = 6$  (لاحظ أن ٦ ليس قاسما حقيقيا للعدد ٦) قواسم العدد ٢٨ الحقيقية هي ١، ٢، ٤، ٧، ١٤، ثم إن  $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

وقد ترك لنا اليونان (في وصيتهم) مشكلتين صغيرتين لم يستطع الرب صيون أن يحلوهما حتى الآن. والمشكلتان صغيرتان وسيطتان لدرجة أنه نامكن كل واحد منا أن يهمل معاهما وجوهرهما. والمشكلتان هما:

- ١ - أوجد الصيغة العامة التي تعطي كل الأعداد الكاملة أو المثالية.
- ٢ - برهن (أو انف صحة القضية) التالية. أن الأعداد الفردية لا يمكن أن تكون أعدادا كاملة أو مثالية.

ها أنتم أولاء ترون معي أنه رغم مرور ٢٣٠٠ سنة على معرفة الأعداد الكاملة أو المثالية فإن لم نجد حتى الآن قاعدة عامة يمكن بواسطتها إيجاد كل هذه الأعداد، ولم نستطع أن نعرف ما إذا كان يوجد أعداد كاملة أو مثالية وهي في نفس الوقت أعداد فردية. ولم يتمكن حتى من إثبات عدم صحة هذه القضية

هناك لكثير من الرياضيين قد عملوا طويلا لحل هاتين المشكلتين ومع ذلك فقد بقوا خارج أسوار المشكلة، وإن كان بعضهم قد حصل على بعض النتائج. مثلا العدم رياضي الشهير أويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) حاول حل المشكلة شكل حربي فتوصل إلى النتيجة التالية.

الأعداد الزوجية تكون أعدادا كاملة ومثالية إذن ونفقط إذا أمكن كتابتها بالشكل:  $2^k \cdot (1 + 2 + \dots + n)$  (ن)  $1 + 2 + \dots + n$  حسب  $2^{k+1}$  عدد أولي.

● ملاحظه هناك صيغة أخرى أبسط لهذا القانون وهي  $2^k \cdot (1 + 2 + \dots + n)$  حيث  $n$  عدد أولي (المحرر)

ها أنما أقدم لك - عزيزي القارئ - فرصة ذهبية لدخول التاريخ بتسجيل إحدى النظريات الرياضية باسمك، يمكنك أن تبدأ منذ الآن بحل هذه المشكلة بحراً.

14 - وإذا لم تتمكن من حلها أو لم تحاول حلها فحاول - على الأقل - أن تجد عدداً واحداً كاملاً أو مثالياً (طبعاً عبر العددين ٦، ٢٨)

### الأعداد الأولية:

تقسم الأعداد الطبيعية - أيضاً - إلى أعداد أولية وأعداد غير أولية.

فالأعداد الأولية هي تلك الأعداد التي تقبل القسمة على الواحد وعلى نفسها فقط (أي ليس لها قواسم غير الواحد وبمعناها). أما الأعداد غير الأولية فهي بقية الأعداد الطبيعية ماعداً الواحد (١) والأعداد الأولية. فالأعداد الأولية هي:

٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ..... .

س - هل يمكن أن يكون مربع عدد طبيعي عدداً أولياً؟

ج - لا.

15- س - ولماذا؟ - (حاول عزيزي القارئ الإجابة على السؤال) لعد إلى الأعداد الأولية:

تبرز هنا مسألتان - كما في الأعداد الكاملة أو المثالية - مرتبطتان بإيجاد هذه الأعداد وهما:

- (١) كيف نجد صيغة عامة أو قاعدة عامة (الحد العام) لحساب العدد الأولي؟
- (٢) ماعدد الأعداد الأولية الموجودة؟

لقد أوجد العالم اليوناني الجغرافي والرياضي الشهير ايراتوستينس (قرنان قبل

---

(٩) العدد واحد لا يعتبر أولياً، ولا يعتبر غير أولي (فليس له أي قواسم غير الواحد نفسه)



الميلاد) حوينا للسؤال الأول مابتكاره طريقة يمكن بواسطتها الحصول على لأعداد لأولية.

لقد كتب ايراتوسمى الأعداد الطبيعية في شبكة كما في الشكل  
وبعد أن (اسقط) من

٦	٥	٤	٣	٢	١	الشبكة الأعداد غير الأولية
١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	(وفق طريقته التي
١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣	سُرحها فيها بعد)
٢٤	٢٣	٢٢	٢١	٢٠	١٩	بقي في شبكة الأعداد
						الأولية فقط.

(لذ دعيت هذه الشبكة بشبكة ايراتوسمى) (أو جدول أو غربال ايراتوسمى).  
أما طريقة ايراتوسمى في الحصول على الأعداد الأولية فتتلخص بما يلي  
لقد كتب أولا الأعداد الطبيعية كلها في الشبكة (بدون الواحد) ولنكتفئ نحن  
في سطر كما يلي:

(٢) ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ... ثم شطب من هذه  
الأعداد مضاعفات العدد ٢ (وحذف الواحد أيضا) نجد:

(٣) ٥، ٧، ٩، ١١، ١٣، ١٥، ١٧، ١٩، ٢١، ٢٣، ٢٥، ...  
٢٧

ثم شطب من هذه الأعداد مضاعفات العدد ٣ (وحذف الواحد أيضا)  
نجد:

(٥) ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، ٢٣، ٢٥، ... ثم شطب من هذه لأعداد  
مضاعفات العدد ٥ (وحذف الواحد أيضا) نجد:

(٧) ١١، ١٣، ١٧، ١٩، ٢٣، ...

هذه حصلت على الأعداد الأولية التي هي مذات النوع أي حصص عليها  
عدد كل عملية شطب وهي ٢، ٣، ٥، ٧، ١١،

أما النوع الثاني (ماعدد الأعداد الأولية الموحدة<sup>١٠</sup>) فقد أحاط عنه العالم  
الرياضي العظيم أقليدس بحواب ذكي جدا.

للحصول على عدد الأعداد الأولية ناقش أقليدس (١٠) الموضوع - تفري -  
بالشكل التالي:

«يجب أن نصرب كل الأعداد الأولية المعروفة ببعضها ثم نصيف إلى مانع الصرب  
العدد واحد إذا نتج لدينا بعد ذلك عدد أولي فسوف يكون أكبر عدد أولي  
معروف لدينا أما إذا كان عددا غير أولي فإسما سوف نجد له قاسما يختلف عن  
الأعداد الأولية التي نعرفها ذلك أنه إذا قسمنا هذا العدد على أي عدد أولي  
نعرفه سوف يبقى لدينا الواحد الذي أصفاه لدى تشكيل العدد منه، وبذلك  
يوجد عدد أولي أكبر من أي عدد أولي نعرفه»

وفقا لمناقشة أقليدس، فإنه مهما يكن لدينا من الأعداد الأولية المعروفة فإننا نستطيع  
دوما أن نحصل على عدد أولي جديد وبما أنه يمكن تكرار هذه العملية باستمرار  
تستطيع أن تصل إلى النتيجة التالية بسهولة أن مجموعة الأعداد الأولية هي  
مجموعة لا نهائية

يتبين لنا من طرق إيراتوستين وأقليدس ما يسميه رياضيو اليونان القدماء  
بـ «هؤلاء الرياضيون لم يحبوا الحسابات كثيرا، ولم يقوموا بحسابات تطبيقية ذات  
أهمية كبيرة كقياس حجم الأرض وما شابهها (على عكس المصريين مثلا الذين  
اهتموا كثيرا بهذه الأمور) فعلماء اليونان أحسوا طرح المشكلة ثم حلها بطريقة  
المناقشة. وما استخدم هذه الطريقة في حل حصصنا على نتائج كبيرة في  
لرياضيات والفلسفة

١٠. هاتر أقليدس حوالي ٣٣٠ إلى ٢٧٥ سنة قبل الميلاد

ولكي نتعرف بشكل أفضل على كيفية حل رياضي اليونان الفداسي للمشاكل التي نعرضهم، سوف نحدث عن واحد منهم وهو الرياضي الشهير طاليس (١١). عندما رآه طاليس مصر أعجب به الكهنة المصريون، وأعجبوا بطريقته المبتكرة في حل المسائل التي عرضوها عليه. ولكي يجنبوا حكمة هذا الضيف اليوناني قرروا أن يطرحوا عليه مسألة رياضية جنبيه فأحدوه إلى أكبر الأهرام في الصحراء وطلبوا منه قياس ارتفاعه. كان الكهنة متأكدين من أن هذا العالم الغريب لن يتمكن من حل المشكلة. ولكن الرياضي اليوناني لم يترك بعد تفكير قصير طلب منهم أن يحضروا له عصا. أحضر الكهنة العصا للضيف اليوناني معتقدين أنه سوف يتسلق الهرم ويبدأ بقياس ارتفاعه بشكل عملي مستخدماً لذلك العصا التي طلبها. ولكن طاليس لم يختر ماله مثل هذا العمل أبداً، فقد أخذ العصا وعمرها بالرمال ثم قال للكهنة: عندما يصبح طول ظل العصا مساوياً لطولها، قيسوا طول ظل الهرم وسوف تحصلون على طول ارتفاعه. دهش الحكماء المصريون من بساطة ودكاء هذه الطريقة التي اتبعها طاليس في حل مسألة صعبة ومعقدة مثل مسألة قياس ارتفاع الهرم مما اضطرت الكهنة المصريين للاعتراف بأن اليونانيين رياضيون ممتازون. وفي واقع الأمر فإن رياضي اليونان قد اغتوا رياضيات ذلك العصر بمعارفهم الكثيرة.

هناك الكثير يمكن قوله حول رياضي اليونان الفداسي غير أنني أكتفي بهذا. فقد (ثرثرت) لدرجة أنني كنت أسى المشكلة التي لم يحلها بعد، وهي إيجاد صيغة أو قانون عام يعطي الأعداد الأولية (ذلك أن ايراتوستينس ابتكر طريقة لإيجادها، ولكن لم يتوصل إلى قاعدة عامة أو قانون عام لإيجادها كلها) ولقد على هذه المشكلة بسيط جداً. الرياضيون لم يصنعوا بعد ولم يتوصلوا إلى مثل هذه

١١ - العالم طاليس اليوناني (الصف الثاني من القرن السابع قبل الميلاد) - فيلسوف فلكي فيزيائي، ورياضي. وهو أحد الحكماء السبعة بعصور القديمة ويعد أول فيلسوف أوروبي (Tales)

القاعدة هناك الكثير من الرياضيين حاولوا حلها مسجدين لذلك طرائق مختلفة ومن الصعب معرفة عدد هؤلاء الرياضيين. ومع ذلك فلم يعترف أحد منهم (أو لم يصرح) بأنه لا يمكن اتحاد صيغة عامة تعطي جميع الأعداد لأويلر. رجعوا عدم توصلهم لمثل هذه الصيغة إلى احتمال ارتكابهم خطأ ما في الحسابات.

حتى العالم الرياضي الميرباني فرما (١٢) (١٦٠١ - ١٦٦٥) قد ارتكب خطأ عندما ظن أنه قد توصل إلى الصيغة العامة لحساب هذه الأعداد وهي:

أ (٥)  $1 + 2^n$  حيث  $n = 1, 2, 3, \dots$  والتي حصل بها على الأعداد التالية:

أ (١)  $1 + 2^1 = 3$  من أجل  $n = 1$

أ (٢)  $1 + 2^2 = 5$  من أجل  $n = 2$

أ (٣)  $1 + 2^3 = 9$  من أجل  $n = 3$

والأعداد أ (١)، أ (٢)، أ (٣)، أ (٤)، أ (٥)، ... سميت بأعداد فرما.

ولكن فرما نفسه لم يبرهن أن أ (٥) عدد أولي من أجل كل قيم  $n$  ففد تبنى فيه بعد أن أعداد فرما ليست جميعها أعدادا أولية فمن أجل:

$n = 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$

أ (٥) عدد غير أولي. إضافة لذلك فإنه في حالة  $n$  عدد مؤلف من ثلاث أوليات لا يمكن التأكد عمليا من صحة العبارة أ (٥) وفيما إذا كان العدد ساتع عدداً لا، ودلت أن أ (٥) يكتب بواسطة مليون رقم.

ومع أن فرما لم يجد صيغة عامة للأعداد الأولية إلا أن أبحاثه قد أدت إلى كشف بعض الخواص المهمة لبعض الرمر من الأعداد الأولية مثلاً:

(١٢) فرما - مؤسس نظرية الأعداد (١٦٠١ - ١٦٦٥) (Fermat p)

لقد برهن فرما على أن كل عدد أولي يمكن كتابته بالشكل  $4n + 1$  يساوي مجموع مربعي عددين طبيعيين. لننظر إلى بعض الأمثلة

$$\begin{aligned} n=1 & \quad 1^2 + 1^2 = 2 = 1 + 1 \times 4 \\ n=3 & \quad 1^2 + 3^2 = 10 = 1 + 3 \times 4 \\ n=4 & \quad 1^2 + 4^2 = 17 = 1 + 4 \times 4 \\ n=7 & \quad 1^2 + 7^2 = 50 = 1 + 7 \times 4 \end{aligned}$$

والمشكلة الثانية التي بحث فيها فرما هي مايلي: هل توجد مجموعة لا نهائية من الأعداد الأولية التي يمكن كتابتها بالشكل  $4n + 1$ ؟

ندرو هذه المشكلة بسيطة، ومع ذلك فإنها رالت مشكلة قائمة لم يتوصل أحد إلى حلها.

فمن أجل

$$\begin{aligned} n=1 & \text{ نجد } 1^2 + 1^2 = 2 \text{ عدد أولي} \\ n=2 & \text{ نجد } 1^2 + 2^2 = 5 \text{ عدد أولي} \\ n=4 & \text{ نجد } 1^2 + 4^2 = 17 \text{ عدد أولي} \\ (\text{من أجل } n=3 & \text{ نجد } 1^2 + 3^2 = 10 \text{ عدد غير أولي}) \end{aligned}$$

إذن فقد أصبح معروفا لدينا - وفق دراسات سابقة - أنه توجد مجموعة لا نهائية من الأعداد الأولية، ولكننا نجهل ما إذا كانت مجموعة الأعداد الأولية من الشكل  $4n + 1$  هي مجموعة لا نهائية.

وهناك مشكلة أخرى شهيرة لفرما. هذه المشكلة لا تتعلق بالأعداد الأولية ولكنها تتعلق بالأعداد التي نعرفها ولذا فهي تستحق الذكر هنا. هذه المشكلة تسمى النظرية العظيمة لفرما.

ظهرت هذه النظرية في أواسط القرن السابع عشر الميلادي، ولم ينقطع أحد أن يبرهن عليها حتى الآن، رغم أن الكثير من الرياضيين قد حاولوا البرهنة

عليها وقيل أن معروف على هذه النظرية لابد من أن يذكر بعض المفاهيم التي تعرفها (عزيري القاري). ولا شك، وبالتحديد نظرية فيثاغورس التي نص على أن مربع طول الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طول الصليحين القائمين.

إذا رمزنا بطول الصليحين القائمين بـ  $s$ ،  $e$  ولطول الوتر بالرمز  $h$  نستطيع أن نكتب النظرية بشكل رمزي كما يلي:

$$s^2 + e^2 = h^2$$

وليس هناك من صعوبة في إيجاد أعداد طبيعية تحقق هذه العلاقة والثلاثية  $s$ ،  $e$ ،  $h$  من الأعداد التي تحقق العلاقة تسمى ثلاثيات فيثاغورس وهناك قاعدة بسيطة يمكن بواسطتها إيجاد ثلاثيات فيثاغورس  $s$ ،  $e$ ،  $h$  من القاعدة هي كما يلي:

من أجل أي عددين طبيعيين  $a$ ،  $b$  بحيث  $a < b$  نجد ثلاثية فيثاغورس  $s$ ،  $e$ ،  $h$  حيث  $s = b^2 - a^2$ ،  $e = 2ab$ ،  $h = b^2 + a^2$  لنشكل بعض الثلاثيات وفق الجدول التالي.

ب	ح	س	ع	ص	$s^2 + e^2 = h^2$
2	1	3	4	5	$3^2 + 4^2 = 5^2$
3	1	8	6	10	$8^2 + 6^2 = 10^2$
3	2	5	12	13	$5^2 + 12^2 = 13^2$
4	1	15	8	17	$15^2 + 8^2 = 17^2$
4	2	12	16	20	$12^2 + 16^2 = 20^2$
4	3	7	24	25	$7^2 + 24^2 = 25^2$
5	1	24	10	26	$24^2 + 10^2 = 26^2$
5	2				
.....	..	..	..	..	.....

واضح أن المجموعة التي تؤلفها هذه الثلاثيات هي مجموعة لانهائية وهذه العلاقة كانت معروفة لدى رياضي اليونان القدامى كما فيهم فرما، ولكن فرما لم يهتم فقط بهذه العلاقة التربيعية، وإنما أثاره أيضا السؤال التالي هل تصح هذه العلاقة من أجل قوى أكثر من القوة ٢؟ أي هل يمكن إيجاد ثلاثية أعداد طبيعية س. ع. ح. ص تحقق العلاقة.

$$س^2 + ع^2 = ص^2 \quad \text{حيث } ن = ط$$

ومن أجل  $ن = ٣$  مثلا يمكن صياغة السؤال على الشكل التالي «هل يمكن أن نجد ثلاثة أعداد طبيعية بحيث إن مجموع مكعب اثنين منها يساوي مكعب لعدد الثالث؟»

أو باختصار. «هل يوجد ثلاثة أعداد طبيعية س، ع، ح. ص تحقق العلاقة  
 $س^3 + ع^3 = ح^3$ ؟»

ولمطلوب هنا أن نجد ثلاثية واحدة - ليس أكثر - تحقق هذه العلاقة التي تسمى بنظرية فرما الكبيرة (بالمناسبة توجد أيضا نظرية فرما الصغيرة، ولكن كما أسا - نحن وأنت - عريزي غاري - رياضيون عظماء، فلن مشعل أيضا بالبحث في المشاكل الصغيرة!) هناك فكاكة مرتبطة بهذه النظرية وباسم فرما بالذات، نرعى الرياضيين وحتى وقتنا الحاضر لذا سوف أحكيها لكم هنا

من المعروف أن فرما كان يحب الكثافة والتعليق على هوامش الصفحات التي يقرأها. ولقد كتب على حاشية هامش إحدى الصفحات ما يلي «أنا متأكد من أنني قد وجدت حلا رتعا هذه النظرية، ولكن هذا الخلل لا يمكن كتابته على هامش الصفحة لأنها صغيرة ولا تتسع له!!!»

تصور معي عريزي القاري أي خدمة عظيمة كان يمكن أن يقدمها فرما للرياضيين لو أن هامش هذه الصفحة كان أكبر قليلا، وكم قنص للرياضيين من جهد خلال مئتين من السنوات؟ ذلك أنه لال لا توجد نمة عند أحدهم من امكانية حل هذه (المشكلة) ومع ذلك فلا يستطيع أي رياضي أن يمر أمام هذه

المشكلة المطروحة ببساطة متناهية وحوادثها، لأن مثل هذا العمل يشاق مع فهمه للشرف العلمي الذي يقتضي ضرورة العمل على حل أي مشكلة علمية تعترضه (عندما يدور الحديث حول الرياضيين لا بد من الاعتراف من أهم يقولون إلى النهاية محافظين على الشرف العلمي مهما كلفهم هذا من الجهد ومن الوقت) ويمكن تصور درجة صعوبة نظرية فرما هذه من جواب جيلبرت - أحد عظماء رياضيي القرن العشرين - عن السؤال التالي

لماذا لم يعمل (أي جيلبرت) على حل مشكلة - أو نظرية - فرما؟

فقد أجاب جيلبرت بقوله: «قل حل هذه المشكلة كان يجب علي وخلال سنوات ثلاث أن أتعرف عليها فقط، وليس لدي مثل هذا الوقت لكبير لاهييه في لبحث عن الحلول الممكنة لهومات فرما»

أثرت نظرية فرما تأثيرا كبيرا على تطور الرياضيات في نهاية القرن الثامن عشر، في ذلك الوقت الذي أجري فيه الرياضيون عن ساء نظرية الأعداد تلك النظرية التي ساعدتهم في لإحانة على مجموعة أسئلة أخرى (غير مشكلة فرما)، وكانت - بالتالي - خطوة كبيرة في طريق البحث عن خواص الأعداد وهكذا ترون أنه قد تحققت في عالم الأبحاث الرياضية الحكمة القائلة «جري وراء الأرب فاصعد دماء».

ما ذكرناه حتى الآن هو حولة قصيرة في تاريخ ساء نظرية الأعداد، وسوف محتتم هذه الحولة بصنع كلمات من مقدمة كتاب (المدخل إلى نظرية الأعداد) للرياضي الإنكليزي ديكسون «خلال عشرين قرنا من الزمان كانت الأعداد أحب المواد إلى الباحثين ليس فقط من الرياضيين الأوائل وإنما لآلاف الهواة أيضا ولابحاث الجديدة لا تنقل عن الأبحاث القديمة شيء، والاكتشافات التي ستتم في المستقبل (معصل الأبحاث الجديدة والمستمرة) سوف تفوق تلك التي تمت حتى الآن»

سوف ننصرف نحن على التعرف على بعض خواص الأعداد لطبيعية تلك



الخواص التي كشفت في لسوات المئة الأخيرة ولم تكن معروفة لرياضي الإغريق القدمي ونحن ونعمون أن أكثر الاكتشافات منه مدرالت أماسا ولم نكتشف معد

### ما عدد الأعداد الطبيعية؟

لقد شغل هذا السؤال الرياضيين منذ أقدم العصور، فقد فهموا أن الأعداد الطبيعية كثيرة وكثيرة جدا، ولكن ما شغلهم هو تحديد كمية هذه الأعداد بدقة مثلا الرياضي الفيزيائي الاعريقي الشهير أرحميدس (الاعريق مرة أخرى هنا) برهن في كتابه «عدد الرمل»، وذلك في القرن الثالث قبل الميلاد، أن عدد ذرات الرمل على شاطئ البحر يمكن أن تمثلها مجموعة الأعداد الطبيعية إذا أوجب مراراً وتكراراً التدرجي للأعداد الطبيعية ثم إن الفيلسوف فلاطون وضع العرصية التالية: لا يوجد نهاية للأعداد الطبيعية (أولاً يمكن الانتهاء من عدد الأعداد الطبيعية). ولقد رأينا سابقاً كيف أن أفليدس العظيم قد برهن على أن الأعداد الأولية (وهي أعداد طبيعية أيضاً) عبارة عن مجموعة لا نهائية

وهذا الشكل يمكننا أن نقرب بواسطة الأعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، من أهم مفهوم في الرياضيات وهو مفهوم اللانهاية ونحدد أكثر - مفهوم اللانهاية الكبيرة - وكما يبدو لنا أنه يجب دراسة هذا المفهوم ليس فقط بسبب أهميته بالنسبة للرياضيات، ولكن لأنه يمس إلى عالم جديد غير مأروف (عالم اللانهايات)، ولا يمكن تصوره أو ملاحظته، والذي يمكن - إضافة لذلك - لتعرف عنه جزئياً بواسطة قواعد مصفية لاء الامتصاصات العنسية اسطنتية

ونعتقد أن هذا المفهوم - اللانهاية - لأهميه الكافية نتأكد من أنه يجب عدم الاعتماد دوماً على «تفكيرنا السليم» فقط «ذلك التفكير الذي يمحرونه رؤسك في وجوده» ويجب، كذلك، عدم الاقتصار على التراهين المسية على الملاحظة فقط وللمؤسسة وفق المبدأ التالي: «أصدق فقط ما أراه»

## عالم الانهائيات :

كيف يمكن أن نعلم أن مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة لانهاية؟  
بالإجابة على هذا السؤال نحاول النظر إلى كيفية إنشاء الأعداد الطبيعية في  
تسلسلها الطبيعي الأعداد تسديء قطعاً من الواحد (١)

١	واحد	عدد طبيعي وبإضافة ١ نجد:
$1+1=2$	اثنين	عدد طبيعي وبإضافة ١ مرة أخرى نجد
$1+2=3$	ثلاثة	وبإضافة العدد ١ مرة أخرى للناتج نجد
$1+3=4$	أربعة	

وهكذا بإضافة العدد ١ للناتج بشكل الأعداد الطبيعية في تسلسلها  
الطبيعي والعدد ٣ الناتج عن العدد ٢ بإضافة الواحد له يسمى العدد ٣  
للعدد ٢ وإد، نلاحظ الأعداد الطبيعية الألف الأولى ثم طف نفس القاعدة،  
لايجاد العدد التالي للألف نجد أن العدد التالي هو  $1001 = 1 + 1000$   
إذن لكل عدد طبيعي - مهما يكن كبير - عدد تال له مباشرة وهذا يعني أنه إذا  
كان لدينا عدد طبيعي  $n$  فإن العدد التالي له هو  $n+1$  والتالي له هو  $(n+1)+1$  ...

يتضح مما سبق أنه يمكن دوما الحصول على عدد طبيعي له أي قيمة مهم نكرر  
كبيرة وإذا أحدها معين الاعتبار إمكانية تكرار هذه العملية أحسابه مرات كثيرة  
(أي عملية إضافة الواحد للناتج) والمطابقة في ظروف مناسبة، فربما نستطيع أن  
نؤكد أنه لا يوجد أي مرر يدعونا لأن نوقف عن هذه العملية في وقت ما من  
الأوقات أو في مرحلة ما من المراحل أي أن الانتقال من عدد طبيعي إلى عدد  
طبيعي آخر غير محدود وبالتالي فمن حصل بذلك على مجموعة غير نهائية من  
الأعداد الطبيعية إذا كنت قد فهمت - عزيزي القارئ - كل ما قيل حتى الآن.

(١٣) نذكر أن مبدأ الكسب يمر - بصورتين عدديتين - لا بغير واحد من الكسب.

من صياغة - يا صديق - (مرحلة)

يمكنك الإجابة على السؤالين التاليين (أو حاول الإجابة عليهما)

16. هل يوجد عدد طبيعي أكبر (كثير عدد طبيعي)؟

17. هل يوجد لكل عدد طبيعي عدد طبيعي سابق؟

### مجموعة الأعداد الطبيعية:

إن الأعداد الطبيعية نؤلف مجموعة سميتها «مجموعة الأعداد الطبيعية» ويرمز لها بالرمز  $\mathbb{N}$  ومجموعة الأعداد الطبيعية تختلف عن المجموعات التي نعالج معها سابقاً (مجموعة لطلاب في الصف، مجموعة العواصم، مجموعة الأعداد من الواحد حتى العشرة...) فهذه المجموعات كلها مجموعات منتهية، أما مجموعة الأعداد الطبيعية فهي مجموعة غير منتهية وهذا نوعان من المجموعات يختلفان عن بعضهما اختلافاً كبيراً. لذلك يجب أن نكون حذرين جداً ولا نصل بشكل ميكانيكي خواص المجموعات المنتهية إلى المجموعات غير المنتهية، لأنه إذا فعلنا ذلك فقد يقع في مأرق لاسهابة له، بحيث لا نجد مخرجاً يمكننا من الخروج منه. ولكننا بالطبع لن ندرس كل شيء من البداية، أي لن نعيد ما درسناه على المجموعات المنتهية حرفياً، وبدلاً من ذلك نلتصّل على المجموعات غير المنتهية من خلال عمليات الأساسية المعروفة (الاجتماع، الاتحاد، التقاطع، الفرق...) معرفة على مجموعات المنتهية وغير المنتهية بنفس الشكل.

لقد توصلنا سابقاً إلى أن الأعداد الطبيعية المختلفة تمتنع بصفات عامة محددة منها أن الأعداد الطبيعية يمكن أن تكون فردية، أو زوجية، أولية، أو غير أولية، وإذا تحدثنا بلغة المجموعات نستطيع أن نقول إن هذه الأعداد (فردية أو الزوجية أو الأولية أو غير الأولية) يمكن أن تؤلف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية، إضافة لذلك فإن كل واحد من هذه المجموعات هي مجموعة جزئية حقيقية من أي غير حالية.

لسطر الآن إلى «عرائث» المجموعات غير المنتهية موضحين بذلك أوجه اختلاف بينها وبين المجموعات المنتهية. ولناخذ مجموعة الأعداد الطبيعية كمثال

على مجموعة عبر مستهية

{ ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ , ... }

إذا أحدها من هذه المجموعة كل الأعداد الزوجية فإن هذه الأعداد تؤلف مجموعة جديدة وهي مجموعة حثية حثيفة من مجموعة الأعداد الطبيعية وهي

{ ٢ , ٤ , ٦ , ٨ , ١٠ , ... }

انظر الآن بالمعاني إلى كل من المجموعتين مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الزوجية وحاول الإجابة على السؤال التالي  
من - هل مجموعة الأعداد الزوجية حرة من مجموعة الأعداد الطبيعية؟

ج - بالتأكيد هذا واضح تماماً ومباشر بالنظر إليهما  
ح - لا أمانع فمجموعة الأعداد الزوجية حرة من مجموعة الأعداد الطبيعية لأن مجموعة الأعداد الطبيعية تحوي في داخلها كل الأعداد الزوجية وبعض الأعداد الأخرى (أي الأعداد الفردية) إذن نحن متفقون في الإجابة على السؤال لدينا الآن سؤال آخر وهو أي الأعداد أكثر عددهم مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة الأعداد الزوجية؟

س - لأعداد الطبيعية أكثر طبعاً من الأعداد الزوجية وهذا واضح ، لأن لأعداد الطبيعية تحوي الأعداد الزوجية والأعداد الفردية أيضاً

ج - الخواب غثلاثي بدون شك ويعتمد على تفكير سليم ولأعداد الزوجية حرة من الأعداد الطبيعية ، والحرى أصغر من الكل إذن يجب أن تكون الأعداد الزوجية أقل من الأعداد الطبيعية وهذه نتيجة تدل على للوهلة الأولى طبيعية جداً وهي تتوافق أيضاً مع حيرتنا التي اكتسبناها

• نذكر أن المؤلف لا يعتبر الأصغر عدداً أصغر كم على حروف ، وهذا مجرد تدليس لا أكثر

[استمر]

كل حانة وفي جميع الحالات ومع ذلك ودرءاً لكل الاحتمالات انحصار  
ومن أجل التأكد لمحاول التحقق من هذه النتيجة

س - وكيف يمكن التحقق من صحة هذه النتيجة؟

ج - بطريقة بسيطة جداً وهي طريقة الراعي الأمي الذي يتحقق من تواجد كل  
الأغنام في القطيع بدون أن يلحقاً للعد فهو يعتمد على الطريقة التالية  
عندما تخرج الأغنام من الحظيرة صاحبه يصع حنة فول أو حمص أو  
فاصولياء في كيس معين لدى خروج كل شاة ( يقابل كل شاة تخرج حنة  
فول في الكيس ) وعند عوده لقطيع يقوم بخروج حنة فول من الكيس كلما  
دخلت شاة إلى الحظيرة فإذا دخل كل القطيع وضيت لديه حنة فول في  
الكيس يجري في المرمى بلحاً عن الشاة المنفردة

واضح أن هذه العملية تصح من أجل أي مجموعة منتهية أو غير منتهية (وهذه  
هي عملية التقابل الشائبة بين مجموعتين) لنستخدم هذا التقابل الشائبي بين  
رئيس المجموعتين غير المنتهيتين ( لأعداد الطبيعية والأعداد الزوجية ) لمعرفة أيهما  
أكثر ( هل تبقى حبات من الفول في الكيس ؟ )

للقيام بذلك نقابل كل عدد طبيعي بعدد زوجي موافق ولتر ما إذا كان  
أحدهما أكثر من الآخر لنبدأ كما يلي :

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
↓	↓	↓	↓	٢	٢	↓	٢	↓
١٨	١٦	١٤	١٢	١٠	٨	٦	٤	٢

ج - ماذا حصل ؟ ما النتيجة التي توصلنا إليها ؟ هل

س - نعم نعم . كل عدد طبيعي يمكن مقارنته بعدد زوجي موافق وهذا  
يعني . . . .

ج - نعم تماماً كما اعتقدنا الأمر عرّب حقا ولكن حقيقة تبقى حتمية للأعداد  
الزوجية نفس عدد الأعداد الطبيعية

ب - نعم . ولكن الأعداد الروحية حرة فقط من الأعداد الطبيعية

ج - نعم لأعداد الروحية حرة من الأعداد الطبيعية

د - والسبحه

ح - لا يحل السبحه في هذه حده هي ان احرة يساوي الكل . وهذه هي  
مفاحة لنا لعالم اللانهايات

ح - يمكن أن تكون القاعدة أن الحرة يساوي الكل صحيحه فقط في حال  
الأعداد الطبيعية . والأعداد الروحية يمكن أن تكون الأعداد الروحية حرة  
شدة (خاصة) ، ولكن حاله لنشاده . كما نعلم . تؤكد قاعده معيه هي  
يحاول أحد أن يدافع عن التفسير السليم . بعد ذلك ٢٢

وكرر لا . إن هذه خادنة ليست حالة خاصة وليست شدة ، وبت هي  
قاعدة . وتوجد أمثلة كثيرة تؤكد هذا

سأخذ مثلاً كل الأعداد الطبيعية التي تقل بحجمه على ٥

٥ ١٠ ١٥ ٢٠ ٢٥ ٣٠

وندرها بالأعداد الطبيعية كما فعل في حالة الأعداد الروحية بعد

١	٢	٣	٤	٥	٦
↓	↓	↓	↓	↓	↓
٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠

نحصل على نفس السبحه . هذه المجموعتين نفس العدد من العناصر ، مع  
أن مجموع الثانية (الأعداد التي تقل بحجمه عن ٥) هي حرة حقيقي من  
مجموعه الاولى (الأعداد الطبيعية) . ونبتأكد من ذلك شكل تكرر بأحد ملاحظ  
ب

سأخذ لأعداد التي تقل بحجمه عن ١٠٠ ونفارب بمجموعه الأعداد  
تصبيه ها يمكن أن تكون مجموعه لأعداد التي تقل بحجمه عن ١٠٠ على

من مجموعة الأعداد الطبيعية؟ لير ذلك بالتمارة



أعتقد انه لا حاجة منا لأن نحاول أكثر من ذلك، واضح تماما أننا حصلنا على نفس النتيجة السابقة حتى ولو قارنا مجموعة الأعداد المؤلفة من أرقام كثيرة ونمثل القسمة على مليون لحصل على نفس النتيجة

عدد عناصر مجموعة الحرة يساوي عدد عناصر مجموعة لأعداد طبيعية وكل منها مجموعة لانهاية.

18 - لذلك فقد وصلنا إلى النتيجة التالية كل المجموعات اللانهائية لها نفس العدد من العناصر، والحرة منها يساوي الكل (الحرة اللانهائية) لا يمكن أن نفعل أي شيء، ولا يوجد أحد يستطيع أن يتفهم أننا لم نحاول انقاذ «تفكير» سليم» وبما أن الأمر كذلك في المجموعات اللانهائية فلنحاول هنا لتربية عن أنفسنا على حساب هذه الخاصة العريضة (وعبر العادية) للانهائيات.

لتصور، لأن فندقا يحوي عددا لا نهائيا من الغرف

=====

إن مثل هذا الفندق لا يمكن رسمه، وهذا غير ضروري هنا لتصور معاد كل الغرف في الفندق ممردة لشخص واحد وأن كل الغرف مشغولة، ولكن

• الصحيح هنا هو القول بأن الحرة بكاف، انكي لا يساويه إذ أن للمجموعات نسويه معنى عدد، وليكن عنصر الصف هنا عن القول بأن الحرة يساوي انكي، وذلك لأن هذا التعبير مستخدم في الماضي قبل اكتشاف أني معنى عدد للتساوي والكثير

[المصدر]

عرفه رقماً - كالمعادن -

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

العرف كلها مشعولة - إذن في المصدق يوحد عدد لانهائي من الرلا،  
ولكن - للحظ السيء - يصل المصدق شخص مهم جداً لا تستطيع إدارة  
المصدق أن تعلن له بساطة للأسف لا يوحد عرف فارعة البحث لمك عن  
غرفة في صدق آخر.

هذه الشخصية مهمة ويجب على الإدارة أن تعطيه عرفة بأي شكل وبحيث لا  
تضطر لطرده أحد من برلاء المصدق مدير هذا المصدق العريف لم يتدمر أبداً بل  
قال للشخص المهم «أرحوا أن تنتظر بعض الوقت لسحد لك عرفة» فمدا بعض  
المدير؟

المدير يطلب من برلائه بعد شديد الاعتذار - أن ينقل كل مهم من عرفته إلى  
العرفة التالية لها، أي ينقل بريل العرفة ١ إلى العرفة ٢ وينزل العرفة ٢ إلى العرفة  
٣.

ماد يريد المدير من وراء هذا العمل؟



يحصل المدير على لعرفة الأولى المارعة لبرل بها الشخص المهم

أرحوا ألا تسألني ماداً حدث للرائر الساكن في لعرفة الأخيرة؟؟ الإدارة تعرف  
حيداً خواص فدها وقد حل المدير المشكلة بدون تعب وبدون أي تعب

ماداً يحدث لو حصر إلى المصدق ثلاثة أشخاص آخرون؟

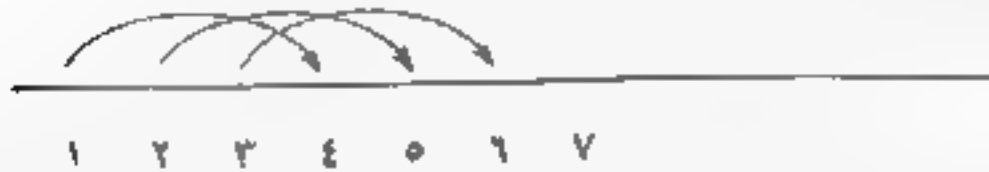
سوف يحل المدير مشكلة أيضاً بكل سهولة وبسرعة الطريقة أي



ينقل نزلاء الغرف ١، ٢، ٣، إلى الغرف ٤، ٥، ٦،

وينقل نزلاء الغرف ٤، ٥، ٦، إلى الغرف ٧، ٨، ٩،

وهكذا فيمرع لديه الغرف الثلاث الأولى حيث يتمكن من وضع النزلاء  
الحدد



في اليوم التالي ظهرت أمام الإدارة مشكلة أكثر صعوبة لقد حصر إلى لعدد  
عدد لا نهائي من النزلاء الحدد، فمادا يفعل مدير الفندق في هذه الحالة؟ وأين  
يضعهم؟

بعد أن «حث» المدير رأسه معكراً قليلاً، وشرب كوب عصير بارد فكر  
ثم اتخذ القرار التالي:

١	ينقل نزيل الغرفة	٢	إلى الغرفة
٢	نزيل الغرفة	٤	إلى الغرفة
٣	نزيل الغرفة	٦	إلى الغرفة
٤	نزيل الغرفة	٨	إلى الغرفة

هل فهمت ماذا يفعل للمدير؟...

لقد نقل نزلاء الغرف ١، ٢، ٣، إلى الغرف ذات الرقم ٢، ٤، ٦،

س - ولكن لم أفهم ماذا يريد بعد كل هذه التحويلات؟

ج - يريد حل المشكلة التي أمامه لقد أفرغ كل الغرف ذات الأرقام الفردية



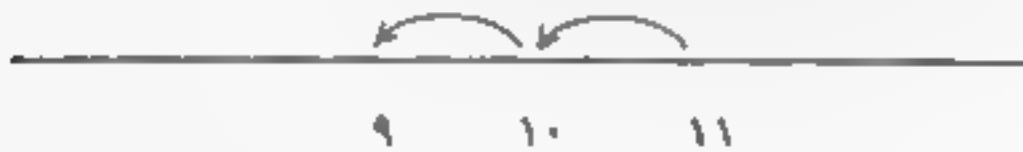
وبن نحن نعلم أن مجموعة الأعداد الفردية لا نهائية وفي هذه الغرف سوف يزل  
الضيوف ولا يخرج أي نزيل من الفندق...

صدق مرجح جداً أنيس كذلك؟ ولكن للأسف لا يمكن سإؤه ولو أمكن الحد  
كـ مشكلة بواحيها في وقفا احاصر وهي مشكلة السكن

بر الان ماذا يحدث إذا بدأ التلاء بمعادة الصدق هل يمكن أن يعرف الصدق  
من التلاء؟ نحن نعرف تماماً أن الإدارة لا تحب أن يعرف الصدق من التلاء،  
ونكن هذه مشكلة غير موحودة أمامنا في هذا الصدق العريب .

19 - التلاء يسافرون والصدق يبقى ملثا ليست حرافة هذه؟  
أنا معك في أن هذا مدهش جداً، ونكن لرمعاً ماد تعمل إدارة الصدق في  
حالة سفر التلاء

إذا سافر سربل العرفة 9 تنقل الإدارة سربل العرفة 10 إلى العرفة 9 وسربل  
العرفة 11 إلى العرفة 10 وهكذا أرى أن كل شيء مفهوم طالما أنت  
تسال عن إذا بقيت العرفة الأخيرة ذرعة 11



20 - وإذا فرصنا أنه قد غادر الصدق عدد لاسهائي من التلاء في هذه الحالة سوف  
تعمل إن لصدق أصبح شبه فارغ على الأقل وفي الحقيقة أن الأمر ليس كما  
نصورت في هذه الحالة تقوم الإدارة بعمل معاكس لذلك العمل ندي قامت  
به عندما حصر إلى الصدق عدد لاسهائي من الأشخاص

## 21 - كيف تتصرف الإدارة؟

هل رأيت ما يحدث في هذا لصدق العريب الذي يميز علم اللاهيات عن علم  
لمتهيات؟، إن مثل هذه الظواهر بعثرها سكان ذلك العلم اللاهائي  
والندي بجوى مثل هذا الصدق عذبة وضعية ومنتفة مع تفكيرهم السليم  
تماماً ومع تحارهم الخاية اليوم، وفي نفس الوقت، يعتبرون علماً المنهي  
علماً غير عادي وعريباً وعبر مصني وأكثر من ذلك مصحح نعم

مصحك تصور كتب بطرون ذو الرياضيات الذي يشرح عليهم مثلاً -  
مدنا مؤلف من ٥٠ عرفة والصدق فرع نسب سراً (القسمة)  
فرع نسب معاداة حمير شحف الصدق هـ شيء مصحك بالنسبة  
هم وعبر مفهوم كيف يفرع الصدق بك سحر بعض التلا (١٤، ٢٩)

### المسلحات - قواعد اللعب عند الرياضيين

أوردنا في بداية هذا الكتاب نضع كلمات للعام الرياضي لشهر حشرت -  
أحد عظماء رياضي النصف الأول من القرن العشرين والذي عثره معاصروه  
حق موسوعة رياضية - مورد هـ أيضاً كلمات أخرى لهذا العام. قال  
حشرت (١٥) الرياضيات ليست إلا لغة للمعوي وفق قواعد بسيطة مستخدمين

(١٤) يتكلم المؤلف بعد ذلك في عدد من الرموز غير مألوفة (وما مألوفة) باسم الرياضيين لهذا  
عندما لذلك فسوف نلخصها كمايلي: (المترجم)

٥٥ هي رمز اللانهائي أما رئيس مجموعة الأعداد الطبيعية التي نحوي عدد لانهائي من  
العاصر فيرمود -  $X_0$  ونقرأ الف صفر فيكون  $(n) = X_n$  وعلى هذا الأساس  
إذا عدد إلى صدق اللانهائي استصف أن يعبر عن الحوادث التي حوت فيه كما يلي

عندما حصر برهن جديد للصدق أصبح لدينا  $X_0 = X_1 + 1$

عندما حصر ثلاثة نزلاء جدد أصبح لدينا:  $X_0 = X_1 + 3$

عندما حصر عدد لانهائي من التلا أصبح:  $X_0 = X_1 + X_2$

22 - وعندما سافر عدد لانهائي من التلا:  $X_0 \geq X_1 - X_2$

فكيف تفسر التساوي هـ؟

وعندما سافر نزيل واحد أصبح:  $X_0 = X_1 - 1$

والرياضي يُعرف المجموعة اللانهائية بالشكل التالي المختصر

تكون المجموعة لانهائية إذا وفقط إذا كان لا مكان إيجاد تقابل شبيهاً وبين

جزء حقيقي منها

(١٥) داجيد حشرت (١٨٦٢ - ١٩٤٣) رياضي ألماني دخل حشرت ثناء جلدته ومهمه على

مختلف أقسام الرياضيات حتى بعد عد موسوعة رياضية فده حشرت استحدث في نظرية

الأعداد، والمطير السرموسي، والمعادلات التفاضلية والكاسية، ووضع لمسلحات

أساسية يهدسه وقد أثرت أعماله تأثيراً كبيراً على رياضي القرن العشرين

في ذلك رموزا ومصطلحات ليس لها أهمية بحق دائها (مثلا: الحرف تر هو أحد أحرف اللغة وليس له أهمية بحد ذاته أكثر من كونه حرفا، ولكن إذا رمزنا وتر للرمز فإنه يصح أحد رموز اللغة الرياضية أو العيزبائية)

ينتهي لك مثل هذا التعريف للرياضيات (على ما أعفد) تعريفا دكيا جدا، ولكنه غير جدي، في الوقت الذي يحوي هذا التعريف تقريبا عميقا وصحيحا للرياضيات، وذلك إذا فهمنا الرياضيات كعلم مؤسس على جملة من المسلمات المسلمات - كما هو معروف - نعتبر صحيحة لا تتطلب أي برهان، وهي لا تتطلب برهانا لكونها مفهومة وواضحة، ودات بناء منطقي سليم، ولا يمكن تعليلها بموضوعات أكثر بساطة ووضوحا منها هذا ما كان معروفا - على الأقل - في الزمن البعيد في ذلك الزمن البعيد عندما كان باماكان في قديم الزمان ملك وله ثلاث أولاد. أما اليوم فالوضع مختلف تماما (يبدو أن الوضع مختلف لأنه لم يعد هناك ملوك!!!!!!.....)

المسلمات في الرياضيات الحديثة أبعد ما تكون عن الوضوح والبساطة حتى أن بعضهم يؤكد أن المسلمات ليست صحيحة دوماً أما فيما يتعلق بالبرهان سوف نتحدث عنه فيما بعد لتعتبر إذن المسلمات موضوعات أو مصادرات

---

● أطلق الرياضيون في الماضي كلمات مثل «بديهية» Axiom مسلمة Postulate فرضية Hypothesis على لحمل، الرياضية الأولية التي يقررون القول بصحتها وذلك للتعبير بها، إلا أن الرياضيين المعديين طابقوا في الثلاثينات من هذا القرن بين هذه الكلمات، وأصبحوا استخدام كلمة Axiom بدلا منها وتستخدم الكلمات «مسلمة» أو «موضوعية» أو «مصادر» كترجمة لهذه الكلمة حيث استعمل اسماء كلمة بديهية ويصل الدكتور محمد واصل الطاهر استخدام كلمة «مصادر» حيث استخدمها علماءها الأقدمون

(المحرر)

● تذكر القارئ بأن المسلمة أو الموضوعية أو المصادرة متطابقة بالمعنى الرياضي لكن لا يلتبس عليه الأمر عند استخدام أي منها كما ذكرنا في ملاحظتنا السابقة

(المحرر)

ومن يستخدم هذه الموضوعات لا يطلب منه تقديم تقرير حول السبب الذي دعاه لاختيار هذه الموضوعات بالذات لأن هذا شأنه وحده، وهو حر في اختيار الموضوعات التي يريد بها، أو حملة الموضوعات التي يريد بها وبني على أساسها نظريته ولكن إذا تبين أنه يوجد في جملة المسلمات التي يستخدمها الرياضي شيء ما (غير عادي) - أو تناقض - فإن الرياضيين سوف يدعون السياق ويصدرون قراراً بإعدام هذه الجملة.

المعروف أن المسلمات تعكس الخواص الأساسية لنظريات أو لحمل رياضية معينة، وإذا حدث أي شيء غير عادي في المسلمات فإن الحملة التي ندخل فيها هذه المسلمات تهار كلها وهذه مسألة لا تختمل المراح. فكل جملة من المسلمات يجب أن يتحقق فيها الشرطان الأساسيان التاليان أولهما: يجب أن تكون تامة وغير متناقضة في داخلها. وثانيهما: أن تكون جملة المسلمات تامة في حالة احتوائها على كل ما هو ضروري لساء رياضي نظري معين تنتمي إليه.

وحتى نكون هذه الحملة غير متناقضة - أي لا تحوي تناقضا في شأنها - يجب ألا نسمع بأعطاء تقرير حول شيء ما في أنه موجود وغير موجود في نفس الوقت، أو أن هناك بعض الموضوعات صحيحة وغير صحيحة في نفس الوقت، وإذا حدث ذلك - تبين أن جملة المسلمات متناقضة - فإن المؤلف (مؤلف جملة المسلمات وليس مؤلف هذا الكتاب) يتحمل مسؤولية جنائية كبيرة.

وأول من لاحظ أهمية لمسلمات في العلم هو أرسطو (٣٨٤ - ٣٢٢ ق.م) - على الأرجح - الذي هو أعظم عقل في العصور القديمة لقد اعتبر أرسطو أنه في كل مجالات العلوم توجد قضايا واضحة لدرجة أنها لا تتطلب أي برهان، وهذه القضايا تؤلف جوهر وأساس هذا العلم. أما أفلاطون فهو أول من أنشأ مثل هذه الخمسة من المسلمات في الهندسة. واستنادا لهذه المسلمات وضع أفلاطون كل النتائج والمفاهيم الهندسية المعروفة في ذلك الوقت (ومراتب معروفة حتى وقتنا الحاضر) وهذا

(١٦) أرسطو (٣٨٤ - ٣٢٢ ق.م) أعظم عالم وفيلسوف عند قدماء الإغريق (Aristo)

ما يدعونا للتأكيد وشجاعة على أن الرياضيات حتى الوقت الحاضر - الهندسة بصورة خاصة - أصبحت علمًا استنتاجيًا ذلك أنه استادا إلى عدد محدد من الموضوعات الأساسية يمكن أن نتوصل إلى كل النتائج بالتدريب ولكي نعرفك - عزيزي القارئ - هل موضوعات أفليدس نعرض فيها يلي الموضوعات الخمس الأولى في الهندسة المستوية - بخصوص هذه الموضوعات هي .

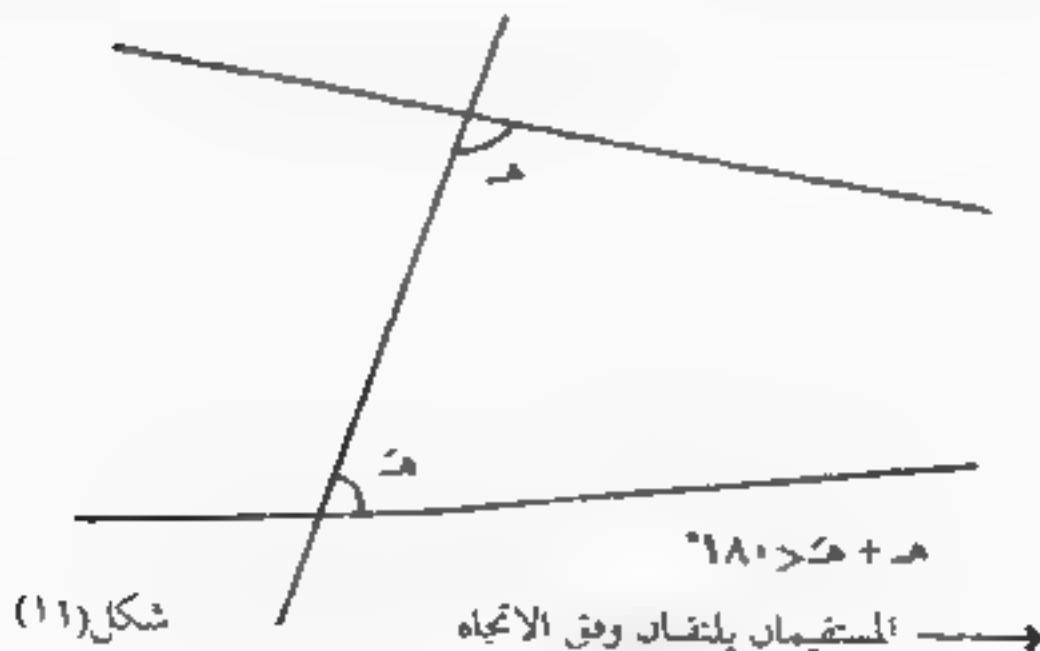
١ - من نقطتين (في المستوى) يمكن إنشاء مستقيم واحد يمر منهما، (أو أن أي نقطتين في المستوى تحددان مستقيماً واحداً)

٢ - أي مستقيم في المستوى يمكن عده إلى ما لا نهاية

٣ - من أي نقطة في المستوى يمكن أن نمر دائرة نصف قطرها اختياري

٤ - كل الزوايا القائمة متطابقة .

٥ - إذا قطع مستقيم مستقيمين وكان مجموع قياس الراويين الداخليين أقل من قائمتين فإن المستقيمين يتقاطعان حتماً في ذلك الاتجاه الذي نوجد به الراويتان ومع أن موضوعات أفليدس لم تكن دقيقة تماماً كلها إلا أنها بقيت وحتى القرن التاسع عشر الجملة الوحيدة من الموضوعات للهندسة المستوية .

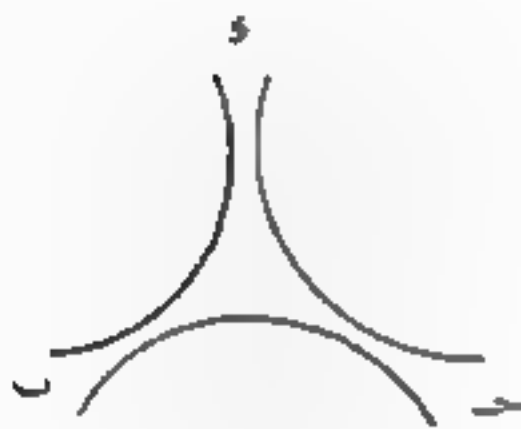


وإذا أمعنا النظر في هذه الموضوعات فإننا نلاحظ - حتى إذا لم نكن رياضيين - الفرق الكبير بين الموضوعات الأربع الأولى والموضوعة الخامسة، فالموضوعات الأربع الأولى تبدو واضحة ومفهومة ويمكن نقلها بدون نقاش، أما الموضوعة الخامسة فهي تثير الشك في مدى صحتها ذلك لأنها طويلة وبصعب حفظها وإعادةها بسرعة إضافة إلى أنها ليست واضحة تماما

ولكي نفهم مضمونها - فقط - لابد من أن يأخذ بيدينا قلما وورقة ومسطرة ونرسم الرسم الموافق (كما في الشكل ١١) وعندما ندرس الرسم جيدا سوف نفهم هذه الموضوعة ولكن الشك في صحتها لا يزول. ولما نحن فقط الذين شككنا في صحة هذه الموضوعة، حتى الرياضيون اعتبروا هذه الموضوعة إشكالية إلى حد ما، واعتبروا أيضا - لفترة طويلة - أن أفليدس قد حشرها حشرا في الموضوعات. ورغم ذلك لم تكن لديهم أي براهين لإزالة هذا الشك في صحتها لقد بحث في هذه الموضوعة أفضل الرياضيين، وقاموا بمحاولات مختلفة للمرهان عليها، وحاولوا تبسيطها أو احتصارها أو استنتاجها من موضوعات أخرى أكثر وضوحا منها، أو وضع صياغة أخرى لها أو. . . باختصار . . . لقد قام الرياضيون بكل ما يمكن أن يفعلوه من أجل البرهنة على صحة هذه الموضوعة. وقد استمرت محاولاتهم هذه اثني عشر قرنا من الزمان، ومع ذلك لم يتمكنوا من دحضها ولم يتمكنوا من البرهنة عليها. والموضوعة مازالت كما هي إلى اليوم، وكما كانت عليه منذ ألفي عام (ما رأيكم في هذا الثبات). ولكن من المستع أن كل هذا العمل للعلماء لم يضع سدى وما حدث هو التالي: بعد أن عمل الرياضيون أكثر من ألف عام حول هذه الموضوعة قرروا الأخذ بموقف متطرف كانوا يشهرون منه لفترة طويلة. في الواقع أنه لم يكن لديهم شيء يحسرونه فيها لو حرموا ذلك. أما الموقف الذي قرروا اعتماده فهو تجاهل وجود الموضوعة الخامسة وتصرف وكأنها ليست موجودة أصلا. وقد أصابهم الذهشة والاستعراب لما حصلوا عليه نتيجة لهذا الموقف، حتى أنهم لم يصدقوا أعينهم عندما اكتشفوا أنهم بالتجسس هذا الموقف (تجاهل وجود الموضوعة الخامسة) قد توصلوا إلى هندسة جديدة لا يوجد

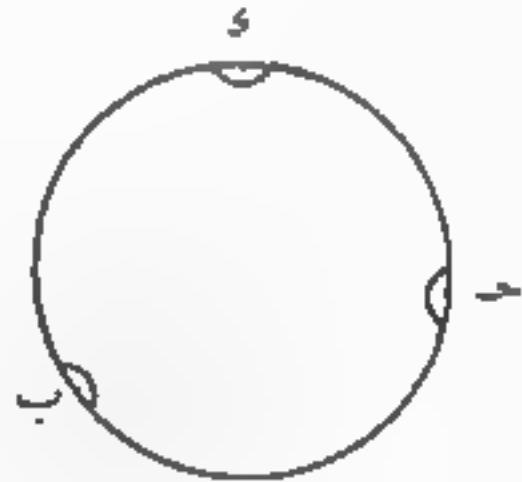
في سائها أي تفاصيل، وأكثر من ذلك فقد توصلوا إلى نتيجة هامة وهي أنه يوجد الكثير من هذه الهندسات المدهشة في إحدى هذه الهندسات كانت الموضوع التالية صحيحة: (في المستوى)

٢٣ - من نقطة خارج مستقيم يمكن إنشاء مستقيمين موارين لهذا المستقيم ولـ هندسة أخرى كانت لدينا الموضوع. «من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم أي مستقيم موار للمستقيم الأول» ومن ثم فإن مجموع قياس زوايا المثلث يمكن أن يكون أكبر أو أصغر من  $180^\circ$  (والمؤلف يذكر عندما أن أقرب أصدقائه قد نال علامة الصفر في الرياضيات عندما قال للاستاد إن مجموع زوايا المثلث يساوي  $110^\circ$ )



$$\text{س} + \text{ح} + \text{ب} < 180^\circ$$

شكل ١٣



$$\text{س} + \text{ح} + \text{ب} > 180^\circ$$

شكل ١٢

مثل هذه الهندسات التي لا تصح فيها الموضوع، الخامسة لأقليدس أطلقوا عليها اسم الهندسة اللاأقليدية.



## كيف يلعب الرياضيون؟

لقد رأينا أنه حتى الرياضي العظيم جلبرت قد اعتبر الرياضيات لعبة.

من - وكيف يلعب الرياضيون بالرياضيات؟

ج - إن إحدى الألعاب المحببة إليهم هي مايلي : نؤخذ جملة مسلّمات ثم نبني على أساسها مختلف النظريات وعلاقات الترابط والنظريات المساعدة (ليما) (١٧) والتعاريف . ثم ينظر ماذا يمكن استنتاجه من كل هذا الساء وبعد أفضل اللاعبين ذلك اللاعب الذي يتمكن من ساء نظرية صعبة وتشمل أوسع مجال من مجالات المعرفة . وكلما كانت النتائج التي يتوصل إليها أكثر، والمسلّمات التي يستخدمها أقل كلما كان لاعبا أفضل

هذه اللعبة تذكرنا بلعبة الشطرنج ففي لعبة الشطرنج أيضا توجد قواعد معينة لتحرك كل حجر، وهذه القواعد يجب احترامها واتباعها بدقة وإلا فقد اللعب معناه . وقواعد اللعبة هي أيضا عبارة عن مسلّمات - ومع أن كل لاعب يعرف قواعد اللعبة (المسلّمات) فإنهم لا يلعبون جميعا بشكل جيد . فهناك البطل العالمي في الشطرنج ، وهناك معلم اللعبة وهناك اللاعب الوسط ، وهناك الهاوي والمبتدئ الذي يتحسر من الخطوة الخامسة ، وفي دروس الرياضيات كما في لعبة الشطرنج . لانكمي الموهبة وحدها للحصول على كل شيء . يجب أن يعرف الدارس النظريات بشكل جيد ، وأن يدروس ألعاب العظماء من «المعلمين» .

اعتقد أنه قد أصبح تعريف جلبرت للرياضيات أكثر وضوحا . ففي الرياضيات كما في لعبة الشطرنج ، لا يمكن لأي شخص أن يصحح «بطلا عالميا» أو

١٧ - LEMMA هي نظرية مساعدة تؤلف مرحلة من مراحل برهان نظرية معقدة حيث تدخل مفهومنا حينها بواسطة تعريف يسند إلى مفاهيم معروفة سابقا المنزحيم  
يشير الأستاذ الدكتور محمد واصل الطاهر إلى أن علماءنا الأقربين أسموها «ماحور»

محترما، ولكنه إذا بدل جهدا معينا في دراسة النظريات فقد يشعر بمتعة اللعب على الأقل.

س - في الحقيقة إن كل ما تحدثت به عن المسلمات ممتنع جدا ومفيد ولكن، على ما أعتقد، دراسة الأعداد الطبيعية لا تتطلب أي مسلمات

ج - أيا آسف، ولكن هذه الفكرة غير صحيحة مد أكثر من ثمانين عاما

س - هل صحيح إذن أنه لدراسة الأعداد الطبيعية يلزم مسلمات؟

ج - نعم. يلزم مسلمات لدراسة الأعداد الطبيعية وهذه المسلمات وصدها العالم الرياضي الإيطالي بيانو (١٨) في عام ١٨٩١ م وقد سميت باسمه موضوعات بيانو ولكن لانحس شيئا فهذه الموضوعات بسيطة ومفهومة بدرجة كافية. وإليك هذه الموضوعات:

(١) الواحد - عدد طبيعي.

(٢) لكل عدد طبيعي  $n$  عدد تال له يسمى  $n$  بحيث:

$$n + 1 = n$$

(٣) الواحد ليس مجاورا لأي عدد.

(٤) إذا كان  $n = m$  فإن  $n = m$

(٥) كل مجموعة تحوي العدد ١ وتحوي إضافة لكل عدد فيها  $n$  تال لذلك العدد هو  $n + 1$  تحوي كل الأعداد الطبيعية. هذه هي موضوعات بيانو وأنت ترى أنها ليست «محبقة»، ويمكن فهمها - تقريبا - مباشرة وبسهولة ومع ذلك لتحاول اعطاء بعض التفصيلات.

الموضوعة الأولى لا تحتاج إلى أي تفسير فهي تعبر عن الحقيقة القائلة إن العدد ١ عدد طبيعي (أعلم أنك سوف تقول إن هذا الام معروف لنا

بدون موضوع . )

الموضوع الثانية تؤكد على أنه بعد كل عدد طبيعي يوجد عدد طبيعي نال واحد يسمى العدد التالي ويرمز لها بالفتحة مثلا :  $1 \rightarrow 2$  ونقرأ (التالي للعدد ١ هو العدد ٢) وكذلك :  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  وبصورة عامة فإن :  $n \rightarrow n+1$  (التالي للعدد ن هو ن + ١).

الموضوع الثالثة تعني أن الواحد أصغر الأعداد الطبيعية أو . الواحد ليس له سابق في مجموعة الأعداد الطبيعية أو الواحد ليس تابيا لأي عدد طبيعي .

الموضوع الرابعة نقول إنه إذا كان لدينا تاليان متساويان فالعددان متساويان . فإذا كان ن تاليا ل ن ، م تاليا ل م وكان ن = م فإن م - ن . ومن الطبيعي أنه لا يمكن أن يكون لعدد طبيعي سابقان مختلفان .

الموضوع الخامسة مهمة جدا (الخامسة مرة أخرى) وتسمى مبدأ الاستقراء الرياضي . وهذه الموضوع تنص على مايلي :

إذا كانت مجموعة من الأعداد من ١ ثم إذا وجد فيها عدد ن فإنها تضم أيضا العدد التالي له ن + ١ أي :  $[n \in S \Rightarrow (n+1) \in S]$  . فإن هذه المجموعة تضم كل الأعداد الطبيعية إذن كل مجموعة من تحقق مايلي :  $[1 \in S \Rightarrow n \in S \Rightarrow (n+1) \in S]$  فإن س تحتوي مجموعة الأعداد الطبيعية . وهكذا فقد تعرفنا على مجموعة من موضوعات الرياضيات المعاصرة .

س - جميل جدا .

ج - وأخيرا أعجبت شيء ما في الرياضيات . هذا يعني أنني قد استطعت أن أعلمك شيئا ما .

س - ولكن لدي سؤال .

ج - اسأل ولا تحجل ومن واهي أن أحب على أي سؤال لديك

س - لم أفهم جيدا دور هذه الموضوعات (موضوعات بيان) إذا كنا قد استطعنا دراسة الأعداد الطبيعية بدونها.

ج - (هذا ما لم أحسب حسابه، ما أن شعرت بالعجز لإنني استطعت أن أحبه بمادة الرياضيات حتى يباحثني هذا السؤال، ليرهل يمكن أن أجد محررا من هذا المأرق؟).

بعم . . في الحقيقة . . لا أدري كيف أفسر لك (يجب أن أكتب بعض الوقت إلى أن أتمكن من إيجاد الجواب).

إن المبرر لوجود الموضوعات موحود بدون شك دون النظر فيما إذا كانت صفات الأعداد الطبيعية معروفة أم لا . . ولكن إذا توصلنا إلى أن مجموعة ما من الأعداد تحقق موضوعات بيان، نستطيع أن نؤكد أن هذه المجموعة تمتلك أيضا صفات مجموعة الأعداد الطبيعية . (أما متأكد أنه سوف يصدق كل كلمة أقولها ولن يطلب مني الرهان) وهذا يعطي برهاناً كاملاً على ضرورة هذه الموضوعات وهكذا فإن قواعد اللعب (الموضوعات) موجودة، أما كيفية استخدامها فهذا مرتبط بمقدرتنا ومهارتنا في استعمالها

### العمليات الحسابية على الأعداد الطبيعية :

أعرف جيدا أنك لاتفهم العمليات الحسابية، ومع ذلك فلا تقنق فحسب لن نقوم هنا بإجراء العمليات الحسابية وإنما سوف نتحدث بعض الشيء حول العمليات الحسابية فقط وبالمناسبة فإن كل الرياضيين لا يحبون الحساب. وفي أقصى الحالات التي تتطلب إجراء عمليات حسابية يكتبون بوضع برنامج معين، ويعطون توجيهات مأسسة إلى ما يجب حسابه أما انحاز العمليات الحسابية فهي تتم بواسطة الآلات، وأنا واثق من أن أي تاذل في مطعم يتقن العمليات الحسابية

أكثر من أي رياضي ، ويجب مع ذلك عدم الإقلال من أهمية العمليات الحسابية لأنها ضرورية لما في جميع جواب الحياة ، ويجب علينا أن نعرفها بشكل جيد . هنا أرد أن ألفت انتباهك إلى فكرة شائعة وحاطنة ، تلك العكرة التي نقول . إن الطفل الذي يستطيع القيام بعمليات حسابية بسرعة سوف يكون بالتأكيد رياضيا جيدا . وخطأ هذه العكرة عائد بالدرجة الأولى لكون هذين الشئين كل منهما منفصل عن الآخر . إذ ليس من الضروري أن يصبح الطفل الذي يتقن العمليات الحسابية رياضيا جيدا في المستقبل والعكس أيضا صحيح .

لنتعرف الآن على العمليات الحسابية على الأعداد الطبيعية . واعتقد أنها معروفة بالنسبة لك فهذه العمليات هي : الجمع والضرب والطرح والقسمة .

س - ولماذا ذكرتها لي بهذا التسلسل ؟ أليس هذا مجرد صدفة ؟

ج - لا لقد تعمدت ذكرها بهذا التسلسل وليس ذكرها مجرد صدفة ذلك أن عمليتي الجمع والضرب عمليات مباشرة أما عمليتا الطرح والتقسيم فعمليات معاكسة .

س - حسن ، وما هو جوهر الخلاف بين العمليات المباشرة والمعاكسة ؟

ج - إليك جوهر الخلاف بينهما .

إذا أخذنا أي عددين طبيعيين فإن حاصل جمعها أو ضربها يعطي حتما عددا طبيعيا . إذن هاتان العمليتان لا تخرجاننا من مجموعة الأعداد الطبيعية ، حاول نفسك أن تجمع مثلا أو تضرب أي عددين طبيعيين وسوف تحصل دوما على عدد ثالث طبيعي وإليك بعض الأمثلة :

$$27 = 24 + 3 \quad 24 = 10 + 9$$

$$30 = 6 \times 5 \quad 120 = 10 \times 9$$

أما عمليتا الطرح والقسمة فلا تعطيان دوما بالنتيجة عددا طبيعيا مثلا :

$$\begin{array}{rcl}
 3 & \text{عدد طبيعي} & 3 = 6 - 9 \\
 3 & \text{ليس عددا طبيعيا} & 3 = 9 - 6 \\
 0 & \text{عدد طبيعي ولكن} & 0 = 4 + 2 \\
 1 & \text{ليس عددا طبيعيا} & \frac{1}{0} = 0 + 1
 \end{array}$$

ولهذا نحن نقول إن مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب (\*)، بينما هي مجموعة غير مغلقة بالنسبة لعمليتي الطرح والقسمة.

إذا فكرت الآن بعض الشيء، نستطيع الإحاطة بسهولة على الأسئلة التالية:

٢٤. ١ - متى يكون حاصل طرح عددين طبيعيين عددا طبيعيا؟

٢٥. ٢ - متى يكون حاصل قسمة عددين طبيعيين عددا طبيعيا؟

لتركيّف نعرف مجموع عددين طبيعيين؟

تعريف الجمع يتم بالشكل التالي: إذا كان ب، ج عددين طبيعيين، فإنه يوحد عدد طبيعي واحد وواحد فقط كما يحب الرياضيون أن يقولوا - سمي مجموع هذين العددين ونرمز له بـ ب + ج.

س - لم تذكر أي شيء غير عادي.

ج - حسن لا تنسرع في الحكم وحاول بنفسك أن تصوغ تعريف عملية ضرب عددين طبيعيين استنادا إلى تعريف مجموع عددين طبيعيين.

وقد توصل الرياضيون خلال سنوات طويلة من البحث إلى قواعد محددة تحقّقها عمليتا الجمع والضرب، وقد سميت هذه القواعد بالقوانين، ولا يمكن

(\*) ونقول أيضا إن جمع والضرب هما قانونا تشكيل داخلي في ط.

ويقال أيضا إن كلا من الجمع والطرح عملية أثنائية على ط، كما يقال إن ط مغلقة تحت

العمليتين + و ×.

لأحد أن يتجاوزها وإلا فالويل له . . . .

ألا تصدق كلماتي؟ حاول أنت أن تتجاوزها. وإليك هذه القوانين.

١ - الخاصّة التبديلية للجمع أي :

$$٧ + ج = ج + ٧ \text{ فإن } ج + ج = ج + ج$$

هذا لقانون يقول لنا : إذا غيرنا أماكن حدى الجمع فإن حاصل الجمع لا يتغير (مثلا :  $٤ + ٦ = ٦ + ٤$ ).

ويوجد قانون مشابه له بالنسبة لعملية الضرب أي :

$$٧ \times ج = ج \times ٧ \text{ فإن } ج \times ج = ج \times ج$$

(وهذا صحيح لأن  $٤ \times ٧ = ٧ \times ٤$ )

وهل هذا القانون صحيح من أجل عملية الطرح؟ لا.

٢ - الخاصّة التجميعية للجمع والضرب أي . مهما تكن الأعداد الطبيعية ب، ج، د فإن :

$$ب + (ج + د) = (ب + ج) + د$$

$$ب \cdot (ج \cdot د) = (ب \cdot ج) \cdot د$$

وهذا القانون يعني أن حاصل جمع أو ضرب ثلاثة أعداد طبيعية لا يتغير بتغيير ترتيب هذه العملية على الأعداد الثلاثة . لير المثلين التاليين .

$$(٣ + ٨) + ٥ = ٣ + (٨ + ٥) \quad (١)$$

$$١١ + ٥ = ٣ + ١٣$$

$$١٦ = ١٦$$

$$(٦ \times ٥) \times ٣ = ٦ \times (٥ \times ٣) \quad (٢)$$

$$٣٠ \times ٣ = ٦ \times ١٥$$

$$٩٠ = ٩٠$$

أم إذا تمكنت من إيجاد ثلاثة أعداد طبيعية لا تتحقق من أحدها هذه القوانين فإن الرياضيين سوف يتركون مباشرة العمل في الرياضيات إلى

أعمال أخرى...

لنتقل الآن إلى القانونين التاليين لعملية الجمع.

٣ - إذا كانت ب، ج عددان طبيعيين وكانت ب. ج = ج. ب عددان تكون  
ب + ج = ج + ب

وهذا القانون يؤكد على أن الصفر ليس عددا طبيعيا لأن هذه العلاقة غير  
صحيحة من أجل الصفر أي:  $0 + ب = ب$ ، أما إذا كان ب، ج  
لايساويان الصفر (لأن كلا منهما عدد طبيعي) عددهما يكون  $٢ + ٣ = ٥$   
 $١ + ٢ = ٣$ .....

٤ - إذا كانت ب، ج، د أعدادا طبيعية وكانت ب + ج = ج + ب + د فإن ج = د  
وهذا القانون يقول: إذا كان مجموع عددين يساوي مجموع عددين آخرين  
وكان حدان في الطرفين متساويين عددهما يكون الحدان الآخران متساويين  
فمن العلاقة:  $س + ٦ = ع + ٦$  نستنتج أن:  $س = ع$

والآن قانونان لعملية الضرب:

٥ - من أجل أي عدد طبيعي ب يكون:  $ب \times ١ = ب$  وهذا القانون يقول  
حاصل ضرب أي عدد طبيعي بالعدد ١ هو العدد نفسه. مثلا  
 $٣ = ١ \times ٣$   $٧ = ١ \times ٧$   $٩ = ١ \times ٩$   $١ = ١ \times ١$   
وأخيرا خاصية توزيع الضرب بالنسبة للجمع

٦ - من أجل أي ثلاثة أعداد طبيعية ب، ج، د  $٥ \times ط$  يكون:

$$ب (ج + د) = ب. ج + ب. د$$

$$\text{مثال: } ٣ (٧ + ٥) = (٧ + ٥) \times ٣ = ٧ \times ٣ + ٥ \times ٣$$

$$٢١ + ١٥ = ١٢ \times ٣$$

$$٣٦ = ٣٦$$

● لاحظ أن هذا القانون ينسجم مع ما أخذ به المؤلف أصلا باستبعاد الصفر من مجموعة الأعداد  
الطبيعية، والأمر يحسن اتفاق لاند من أن يحل بالانسجام  
الحرر



٢٦ - واضح أن هذا القانون محدد كفية ضرب الأقواس بشكل صحيح

هذه هي قوانين جمع و ضرب الأعداد الطبيعية

بر الآن كيف نستخدم، عادة، خاصتي الجمع التبديلية والتجميعية

إد أردن جمع عدة أعداد بشكل عمودي فإننا عادة - ولسهولة، حرء هذه العملية - نقوم بالجمع من الأسفل إلى الأعلى ثم من الأعلى إلى الأسفل واستنادا إلى خاصتي

$$\begin{array}{r} 14 \\ 6 \\ 13 \\ \hline 33 \end{array}$$

الجمع التبديلية

ولتجميعية فإن

حاصل الجمع يكون

نفسه في الحالتين وإذا كان من الضروري حساب مجموع عدد كبير من الحدود فإننا نقوم بتجميعها في زمر، ونقوم بجمع حدود كل زمرة، ثم نجمع النتائج مطبقين أثناء ذلك خواص الجمع التجميعية والتبديلية مثلاً.

$$60 = 40 + 20 = (11 + 29) + (7 + 13) = 11 + 7 + 29 + 13$$

وفي حانة الصرب نستخدم أولا الخاصة التوزيعية ثم الخاصة التجميعية لنر ذلك في المثال التالي:

$$+ 140 = 42 + 140 = 6 \times 7 + 20 \times 7 = (6 + 20) \times 7 = 26 \times 7$$

$$182 = 2 + 180 = 2 + (40 + 140) = (2 + 40)$$

ونحن نفهم - عادة يمثل هذه العمليات ذهنيا - إذن فالقوانين التي عرضناها معروفة لدينا سابقا بشكل جيد. ونحن نستخدمها أثناء اجراء الحسابات دون أن نعلم أننا نستخدمها قوانين (وأنا اعتقد أن هذا أفضل بكثير، لأننا إذا عرفنا أنها قوانين حاولنا باستمرار مخالفتها، ذلك أنه - حسب المثال الشائع - «التمر المحرم دوما لذيذ»

كل م ذكرناه حتى الآن بسيط إلى أبعد الحدود، وواضح وكأنه ليس من

الرياضيات ولكن علينا ألا نفرح قبل الأوان وأكثر من ذلك علي ألا  
 مساهمي أمام الرياضيين لأننا قد استوعبنا قانوني الجمع والضرب لأنه إذا  
 أحررت أحد الرياضيين عن معارفك هذه بالرياضيات فإنه سوف يسمعك  
 يهدوء وبشاشته ثم يقول لك الملاحظة التالية: «في الواقع هذا شيء، مع  
 جدا، ولقد سميت أنا كل هذا، صحيح لقد عرفوا هذه العمليات بهذا  
 الشكل في ذلك الوقت الذي توحدت فيه الامبراطورة ماريا تيريزا  
 ولامبراطورة فرانتسا يوسيف، ومن المحتمل أن يكون التعريف قد تم بعد  
 ذلك بوقت قليل أو ما قبل الحرب العالمية الأولى إذا لم أكن محطئا».

وهذا ما نستحقه لأنه لم يطلب منك أحد أن تتحدث عن الرياضيات مع  
 الرياضيين - هذا كما لو كنت تحدث السبيري عن الثلج - وقد تتابع أنت  
 حديثك مع الرياضي دون أن تعلم ما ينتظرك منه:

س - حسن إذن كيف يعرف الرياضي مفهوم الجمع الآن؟

ح - سوف يجيبك ناظرا إليك من أعلى بظارته: «هذا الموضوع أبسط إلى حد ما  
 تعريف الجمع هو على الشكل التالي: إن الجمع تابع (نطبق) معرف من  
 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  يأخذ قيمته في  $\mathbb{N}$  أي أن:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  يعطي هذا التابع بالمعبرة:

(ب، ج)  $\mapsto$  ب + ج حيث ب، ج  $\in \mathbb{N}$

س - ماذا؟ ... ماذا قلت؟ ... الجمع هو ...؟

ح - سوف يكرر الرياضي طائفا أنك لم تسمعه جيدا.

الجمع هو تابع  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

أما أنت فسوف تحاول الخروج من المأزق والتأكد نفسك مما سمعت  
 فتسأل وكيف يمكن أن تعبر هذا؟ وسوف يجيبك الرياضي محاولا إيهاء  
 المحادثة «لأنهم ماذا يمكن أن أقصر لك هذا إذا كان كل شيء واضحاً في

التعريف! وسوف ينتهي حديثك مع الرياضي عند هذا الحد مع أنك للأسف قد سببت أن تسأله ما (حاصل الصرب) ولو سأله لسمعت منه الجواب التالي:

(حاصل صرب) العددين ب، ج الطبيين هو تابع  $\tau$  ط  $\times$  ط  $\times$  ط معطى بالعلاقة التالية:  $\tau(b, c) = b \times c$  ب، ج، ح و ط {  
أعلم أنك سوف تعود إلى الآن لأفسر وأوضح لك كلمات وتعريف ومصطلحات الرياضي (١٩). ولحسن الحظ فانا أعرف هذه التعاريف واصطلاحات.

(لقد وصح لي هذه التعاريف طالب في فرع الرياضيات، عربون شكره لي لأنني أهديته بطاقة لمشاهدة مباراة كرة القدم، صحيح أن هذا الطالب قد ترك قسم الرياضيات بعد أن درس في السنة الأولى ثلاث سنوات متتية دون أن يترفع، والتحق بكلية طب الأسنان، ولكن لأهمية هذا أدا: من الممكن أن يكون هذا هو السبب الرئيس في أنه استطاع أن يفسر لي كل شيء عن هذه التعاريف!!) هذا مقال طالب الرياضيات: إن ط  $\times$  ط أو  $\tau$  ع أو . . . هي (الحاصل) الديكارتي العادي للمجموعات وهو يتألف من جميع الأرواح المرتبة التي يكون مسقطها الأول من المجموعة الأولى ومسقطها الثاني من المجموعة الثانية مثلاً:

إذا كانت  $\tau = \{b, c, d\}$  و  $\tau = \{1, 2\}$  فإن

$\tau \times \tau = \{(b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (d, 1), (d, 2)\}$

وهي مجموعة مزودة من ستة عناصر وكل عنصر منها زوج مرتب وكذلك يمكن أن نجد جداء المجموعة ع بنفسها أي ع  $\times$  ع بالشكل

(١٩) يقصد بالرياضي في كل هذا عالم الرياضيات وليس مجرد مدرس للرياضيات (صمن لغوسين) ( نضع ما يتحدث به المعلم مع نفسه)

$$ع \times ع = (١١، ١١) (١١، ١٢) (١٢، ١١) (١٢، ١٢) (١١، ٢٣) (٢٣، ١١) (٢٣، ٢٣)$$

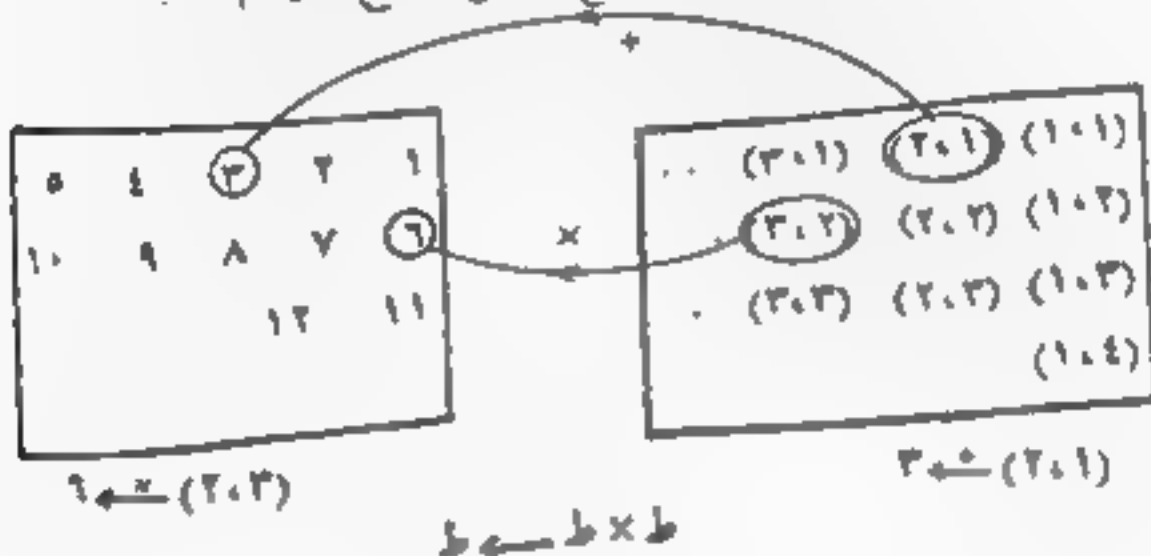
أما الحداء ط  $\times$  ط فهو مجموعة كل الأزواج المرتبة الممكنة للأعداد الطبيعية ط .  
 $(١، ١) (١، ٢) (٢، ١) (٢، ٢) (١، ٣) (٣، ١) (٣، ٢) (٣، ٣) \dots$

وعدد عناصر ط  $\times$  ط كبير جدا بالطبع أولا نهائي، تماما كما هي المجموعة ط  
 لا نهائية لذا يمكن أن نمثله بالجدول التالي اللانهائي من الأزواج المرتبة

$$\left\{ \begin{array}{l} (١، ١) (٢، ١) (٣، ١) (٤، ١) \\ (١، ٢) (٢، ٢) (٣، ٢) (٤، ٢) \\ (١، ٣) (٢، ٣) (٣، ٣) (٤، ٣) \\ \dots (١، ٤) (٢، ٤) (٣، ٤) (٤، ٤) \dots \end{array} \right\}$$

وكن عددين يؤلفان أحد هذه الأزواج، فالعددان ٢، ٤ يؤلفان  
 الزوج (٢، ٤) الموجود في الجدول في السطر الرابع والعمود الثاني بينما  
 الزوج (٤٣، ١٥٦) موجود في الجدول نمسه السطر ٤٣ والعمود ١٥٦  
 وهكذا، . . . . .

وعندما نقول ان الجمع تابع: ط  $\times$  ط  $\rightarrow$  ط معطى بالعلاقة: (ب، ج)  
 $\rightarrow (ب + ج)$ . ب، ج  $\in$  ط فهذا يعني أننا نضع كل زوج مرتب (ب،  
 ج) من المجموعة ط  $\times$  ط في توافق مع عدد وحيد من المجموعة ط هو العدد  
 ب + ج ويمكن أن نمثل هذا التابع بشكل أوضح بالرسم التالي



فالروح (١، ٢) من المجموعة الأولى ط × ط يقابله وفق تابع الجمع العدد ٣ من المجموعة الثابتة ط وفي عملية الضرب يوافق كل روح من الأعداد من المجموعة الأولى عددا واحدا فقط (عنصرا واحدا) من المجموعة الثابتة فالعصر (٣، ٢) من ط × ط (كما في الرسم) يوافقه العصر ٦ من ط اي: (٣، ٢) ← ٦

هذا الشكل فسر لي طالب الرياضيات الذي لم يصح عالم رياضيات عمليتي الجمع والضرب على ط.

### محادثة حول الصفر:

س - وماذا يمكن أن نقول حول الصفر؟ فالصفر يكافئ لشيء، والصفر عموما ليس عددا (عما هو صفر (عادي)). وماذا يمكن أن نقول هنا أكثر من ذلك؟  
ج - هذا ليس كل شيء. ولذا فانا أرجوكم أن تتحل بالصبر وأن تؤجل أقوالك وأحكامك هذه إلى نهاية محادثة الصفر ليس كما نظرت لأول وهلة أنه لا يملك أي أهمية. فللعدد صفر خواص كثيرة مختلفة عن خواص بقية الأعداد الطبيعية وهي ممتعة بنفس الوقت. وأريد أن أحدثك هنا عن هذه الخواص بالذات

لر أولا كيف تشكل هذا العدد. لمحاول أن تطرح - عفا - جمع عددين متعاكسين نظيرين مثلا:

$$٠ = (٣-) + ٣ \quad ٠ = (٧-) + ٧ \quad ٠ = (١٠٧-) + ١٠٧$$

$$\text{وبصورة عامة: } ٠ = (ب-) + ب$$

اذن ناتج جمع عددين متعاكسين هو الصفر دوما.

لقد توصلنا - كما ترى - إلى العدد صفر أثناء عملية الطرح. ولكن هل كانت هذه العملية سريعة وبسيطة دائما كما هي الآن؟

بالتأكيد لا كان من الضروري القيام بأعمال كثيرة ولوقت طويل إلى أن اقتنع الرياضيون تماماً أن الصفر (على قدم المساواة) مع بقية الأعداد الطبيعية المعروفة. ولهمود هم أول من اعترفوا بالصفر كعدد فعلي قبل ألف عام ولكن رياضي أوروبا ترددوا طويلاً في قبول هذا الاعتراف. ففي القرن التاسع عشر أكد أحد الرياضيين الإنكليز المحترمين (٢٠٠) أن الصفر ليس عدداً والخلاف حول الصفر (كما حدث حول الأعداد السالبة) قد ران تماماً في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر فقط. وهذه الحقيقة تعني أن الصفر أصغر عمراً من بقية الأعداد الطبيعية.

س - إلى أي مجموعة من الأعداد ينتمي الصفر إلى مجموعة الأعداد الموجبة أم السالبة؟



ح - لا ينتمي الصفر إلى أي من المجموعتين. بل هو يقع على الحدود بينهما ويشعر هناك مكاناً مرموقاً فالصفر إذن هو شخصية أو عنصر متميز، وبعبارة أخرى فالصفر هو صفر. ١

س - هل يمكن ربط الصفر بالمجموعات؟

ح - بالتأكيد. الصفر مرتبط بالمجموعات بشكل مباشر لأنه ينشأ من المجموعة الخالية. كما قد أعطينا تعريف الصفر - إذا كنت تذكر - بأنه رئيس المجموعة الخالية وكتبنا:  $0 = (\emptyset)$ .

وإن الصفر هو عدد عناصر المجموعة الخالية. ويجب أن ننتبه كثير كي لا ننحصر، ويمكن بدل هذا التعريف مايلي:  $0 = \{ \}$  لهذه الكتابة الأخيرة

(٢٠) هو الرياضي جون واليس (١٦١٦ - ١٧٠٣) استاذ في الهندسة من جامعة أكسفورد وهو أحد الشخصيات الرياضية المرموقة في عصره. (Wallis)

نعي. رئيسي المجموعة المؤلفة من العنصر الوحيد الصفر ولذلك فإن

$$1 = (\{0\})$$

نستعرض الآن خواص هذا العدد الصفر. إذا جمعنا الصفر إلى أي عدد طبيعي فالناتج هو العدد لطبيعي نفسه مثلاً:

$$2 = 0 + 2 \quad 4 = 0 + 4 \quad 16 = 0 + 16$$

وبصورة عامة:  $b = 0 + b$  وذلك مهما يكن العدد الطبيعي  $b$ . وهذا فإن الرياضيين يقولون إن الصفر عنصر محايد بالنسبة للجمع. أعدم أن هذه الخاصية للصفر معروفة لديك. وأذكرك هنا أن العدد واحد يملك نفس الخاصية - عنصر محايد - بالنسبة لعملية الضرب. أما خاصية الصفر المتعلقة بعملية الضرب فهي أكثر أهمية.

سأحاول أن أضرب أي عدد مهما يكن كبيراً بالصفر نجد أن:

$$0 = 0 \times 1190 \quad 0 = 0 \times 75 \quad 0 = 0 \times 9$$

$$0 = 0 \times 3124356987921356789$$

ما قولك الآن؟ أليس للصفر قوة متميزة بين الأعداد؟

وهكذا. إذا ضربنا أي عدد بالصفر فالناتج دوماً يساوي الصفر أي

$$b \times 0 = 0 \text{ مهما يكن العدد } b (*)$$

حاول أن استطعت أن تجد عدداً آخر له نفس الخاصية كم للصفر

هذا ليس كل شيء، ولكن من الأفضل ألا نتحدث عن الفئة على الصفر

س - ولماذا؟

ج - لأن أي محاولة لتقسيم على الصفر يطرئ عليها الرياضي فأبها «مخالفة» أشد من عمدية عبور الشارع والإشارة حمراء، أو السير في عكس اتجاه السير المسموح

(\*) نقول إن الصفر هو «عنصر ماحي» بالنسبة للضرب

هـ الرياضيون يؤكدون أن القسمة على الصفر مسموعة معنا باتنا (حب قوايهم)، ولا يقولون أكثر من ذلك في هذا الموضوع!! وعلمنا يدور الحديث حول القوانين الرياضية فالرياضيون لا يقولون فيها أي توسل أو طلب لمرحلة. صدقي أن القوانين الرياضية لا يمكن مقارنتها في أي شيء مع قوانين المحاكم والقضاء العام (إلا بالاسم فقط) فالمحاكم تحاول دائما إيجاد مخرج من قوانين المحاكم (قوانين الحقوقيين) أما لقوانين الرياضية فهي صرامة جدا ولا تتغير باستمرار بالمقارنة مع قوانين أخرى، وهي باقية في قوتها وتأثيرها. مئات بل آلاف السنين وتطبيقاتها واحدة في جميع أنحاء العالم وهذا يعني أنه إذا أردنا أن ندرس الرياضيات يجب علينا أن نحترم هذه القوانين دون النظر إلى المكان الذي نعيش فيه: سورية أو اليابان أو أميركا أو الهند... وهكذا لنحفظ القاعدة التالية:

تقسيم أي عدد على الصفر مسموع معنا باتنا.

سـ وهل يمكن تقسيم الصفر على أي عدد آخر؟

حـ يمكن هذه العملية مسموح بها إذا قسمنا الصفر على أي عدد ولتأتج دائما هو العدد صفر أي أن:

$$0 = 1987 \div 0 \quad 0 = 7 \div 0 \quad 0 = 4 \div 0$$

وبصورة عامة. من أجل أي عدد طبيعي ب يكون  $0 = b \div 0$

وهكذا فقد توصلنا إلى أن الصفر ليس فزاعا بل عددا ممتعا جدا ويشمل مكنه خاصة بين الأعداد إصافه لذلك، فالصفر هو العدد الوحيد الذي اصطر الرياضيون إلى وضع قاعدة خاصة من أجله (لعملية تقسيم الصفر على أي عدد)، وهذا ليس بالأمر القليل خصوصا وأن الرياضيين لا يحبون الحالات الشاذة. لذا يجب ألا نتحدث عن الصفر في المستقبل باستثناءات

هذا ما أردت أن أقوله لك عن الصفر



### بضع كلمات حول بقية الأعداد:

بعد أن نعرفنا على الصفات الأساسية للأعداد الطبيعية وبعض خواصها نجد من لضرورة أن نذكر بضع كلمات عن بقية أعضاء أسرة الأعداد (لكي لا ينصب بقية أعضاء الأسرة على الأقل).

من الملاحظ أنه مهما تكن الأهمية الكبيرة التي تتميز بها الأعداد الطبيعية، ومهما تكرر قديمة فهي غير كافية وحدها من أجل تحقيق أبسط العمليات الحسابية التي نجرى كل يوم في حياتنا. لنكن لدينا المسألة: «يملك رجل ٧ ليرات وعليه دين ١١ ليرة ما الدين المتبقي عليه بعد أن يعطي كل النقود التي يملكها؟»

نعم أنه سوف يبقى على هذا الرجل دين مقداره ٤ ليرات لأن  $(7 - 11 = -4)$ . واضح أن مجموعة الأعداد الطبيعية غير كافية لحل مثل هذه المسائل البسيطة (ذلك أن  $-4$  لا ينتمي إلى  $\mathbb{N}$ )، ولذلك فنحن مضطرون إلى توسيع مجموعة الأعداد حتى تتمكن من حل مثل هذه المسائل على الأقل.

وقد تعرفنا على مثل هذا التوسع فيما سبق عندما أضفنا الصفر إلى مجموعة الأعداد الطبيعية (٣١).

والتوسع الآخر لمجموعة الأعداد نحصل عليه بالشكل التالي. نضرح لأعداد الطبيعية لكبيرة من الأعداد الطبيعية الصغيرة فنحصل على أعداد سالبة مثلاً:

$$2 - 7 = -5 \quad 3 - 6 = -3 \quad \dots$$

إن مجموعة الأعداد الطبيعية مع مجموعة الأعداد السالبة والصفر التي حصلنا عليها تزلف مجموعة جديدة أوسع من مجموعة الأعداد الطبيعية ونحويها هذه المجموعة الجديدة سسمها مجموعة الأعداد الصحيحة ورمز لها بـ  $\mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

(٣١) نلاحظ أننا برمز في هذا الكتاب  $\mathbb{N}$  لمجموعة الأعداد الطبيعية ما عدا الصفر أي أن

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  / المترجم /

ويكسر تمثيلها على مستقيم الأعداد بالشكل التالي .



والنوسع الثالث لمجموعة الأعداد يعطيا الأعداد العادية النسبة والخاصة هـ،  
النوسع الجديد لمجموعة الأعداد نتج من كون عملية القسمة غير ممكنة في صـ  
دائما فإذا كان ب، ج عددين صحيحين و ج ≠ ٠ فإن حاصل القسمة  $\frac{ج}{ب}$   
يكون عددا صحيحا إذا كان ب من مضاعفات ج فقط أي

$$٢ = \frac{٤}{٢} \quad ٤ = \frac{٨}{٢} \quad ٦ = \frac{١٨}{٣} \quad \dots$$

أما إذا لم يكن ب من مضاعفات ج فناتج القسمة ليس عددا صحيحا

$$\text{مثال: } \frac{٣}{٢}, \frac{٥}{٣}, \frac{٤}{٥} \dots$$

وهذه مجموعة جديدة من الأعداد الكسرية أو النسبة

ويكن نلاحظ أن كل عدد صحيح يمكن أن نكتبه أيضا بشكل عدد كسري سبي  
ذلك أن:

$$١ = \frac{١}{١} \quad ٢ = \frac{٢}{١} \quad ٣ = \frac{٣}{١}$$

فإذا أخذنا اجتماع مجموعة الأعداد الكسرية غير الصحيحة ومجموعة الأعداد  
لصحيحة لننتج لدينا مجموعة جديدة من الأعداد. هذه المجموعة الجديدة سميناها  
مجموعة الأعداد العادية النسبة ونرمز لها بالرمز  $\mathbb{Q}$  ويكتب ما حصار بالشكل

$\mathbb{Q} = \{ \frac{ج}{ب} / ج = ٠, ب \neq ٠ \}$ . نلاحظ أن  $\mathbb{Q}$  تحوي صـ (حسب طريقته  
تشكيلها) وهي أوسع من صـ.

ومن الممتع أن مجموعة الأعداد العادية يمكن كتابتها بالشكل التالي

نكتب جميع الكسور المتتالية التي يكون مجموع صورتها ومخرجها (سطلها ومقامها)  
مساوية أولا لعدد ١ ثم للعدد ٢ ثم للعدد ٣ ثم  
فتنشأ لدينا المجموعة التالية:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{4}{1}$$

بعد ذلك نحذف الأعداد المكررة مثل .

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{1} & 1 &= \frac{2}{2} & 1 &= \frac{3}{3} \\ 2 &= \frac{2}{1} & 3 &= \frac{3}{2} & 4 &= \frac{4}{1} \end{aligned}$$

ثم نضيف إلى المجموعة المتبقية الصفر ونضيف الأعداد المعاكسة لجميع الأعداد الموجودة فيها فتنتج لدينا المجموعة

$$K = \{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, 3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \dots\}$$

ولذلك فإن الرياضيين يؤكدون أنه يمكن (عد) مجموعة الأعداد العادية إضافة لذلك فإن مجموعة الأعداد العادية هي مجموعة مترصة على مستقيم الأعداد، وهذا يعني أنه بين أي عددين عاديين نسبيين - مهما كانا متقاربين - يوجد عدد عادي آخر.

٢٧ - فهل يمكن لمجموعة الأعداد الطبيعية أن تكون مترصة؟

فكر بالإجابة على هذا السؤال.

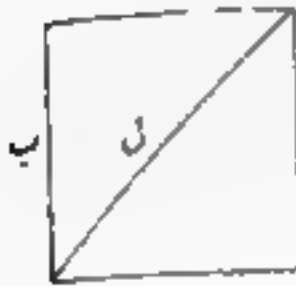
أما كيفية وضع الأعداد العادية على مستقيم الأعداد فهي كما يلي:



ورغم هذا التوسع الجديد في مجموعة الأعداد فهناك مسائل لا يمكن حلها باستخدام الأعداد العادية، فهذه المجموعة غير كافية مثلاً لحل كل مسائل التي نظهر بالتطبيق العملي وهذه أمثلة منها

١ - احسب طول قطر المربع الذي طول ضلعه ب

الحل: طول قطر المربع حسب نظرية فيثاغورس هو:  $ل = ب\sqrt{2}$



والعدد  $\sqrt{2}$  لا يمكن كتابته بالشكل  $\frac{ب}{ج}$  حيث ب، ج عددين عاديين إذن  $\sqrt{2}$  ليس عددا عاديا (نسبيا)

٢ - احسب طول محيط الدائرة التي نصف قطرها ر  
الحل:



طول محيط الدائرة هو  $ط = 2\pi ر$

والعدد  $\pi$  ليس عددا عاديا اذ لا يمكن كتابته بشكل كسر  $\frac{ب}{ج}$  فمن المعروف

$$\pi = 3.14159 \dots$$

٣ - أوجد عددا إذا ضربناه بنفسه كان الناتج ٥

وإذا كتبنا هذه المسألة بواسطة المعادلات لأصبحت على الشكل التالي

حل المعادلة  $س = ٥$

والحل هو:  $س = ٥$  أو  $س = -٥$

والعدد ٥ لا يمكن كتابته بشكل كسر  $\frac{ب}{ج}$  (حيث ب، ج عددين عاديين) إذن  $\sqrt{٥}$  ليس عددا عاديا (نسبيا).

وهناك الكثير من هذه الأمثلة التي نجد فيها أعدادا غير عادية (نسبية)، والكثير

من هذه الأعداد كانت معروفة لرياضي قدماء الأغريق. فقد عرفوا مثلا وجود

العدد  $\sqrt{2}$  غير أنهم دهموه كطول قطر المربع الذي طول ضلعه يساوي (وحدة) الأطوال، ولم يعتبروه عددا كباقي الأعداد.

وفي بداية القرن الثامن عشر فقط تم الاعتراف بالأعداد التي لا يمكن كتابتها

شكل كس  $\frac{p}{q}$  وسميت بالأعداد غير العادية (غير نسبية)

واجتماع (اتحاد) مجموعتي الأعداد العادية والأعداد غير العادية تؤلف مجموعة جديدة من الأعداد - توسع جديد لمجموعة الأعداد - هي مجموعة الأعداد الحقيقية ويرمز لها بـ  $\mathbb{R}$

٢٨ - هل تعرف كم عددا حقيقيا تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية؟

هناك مجموعة نقول إنه توجد أعداد حقيقية بقدر النقاط التي تؤلف مستقيم الأعداد فكل نقطة من مستقيم الأعداد تقابل عددا حقيقيا والعكس صحيح أن كل عدد حقيقي يقابل نقطة على مستقيم الأعداد

س - هذا يعني أن مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة لانهائية تماما كمجموعة الأعداد الطبيعية، وأن العدد الرئيس لها هو  $\omega$  (ألف صفر) أيضا

ج - إنك على حق تماما فمجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة لانهائية ومع ذلك فعدد الأعداد أكثر قليلا من عدد الأعداد الطبيعية.

س - وكيف يمكن أن تكون أكثر إذا كانت الأعداد الطبيعية لانهائية؟

ج - فعلا إن الأمر مثير للحيرة والذهول، ومع ذلك صدقي - إن الرياضيين يقسمون الأعداد على أن مجموعة الأعداد الحقيقية أكثر من مجموعة الأعداد الطبيعية.

س - حس . ولكن مامصير مفهوم اللانهائية في هذه الحالة؟

يتبع من ذلك أنه يوجد لانهايات مختلفة، إحداها لانهاية صغيرة والأخرى لانهاية كبيرة - هذا مثير للضحك . . . .

ح - ولكن الواقع هو أن الأمر كما ذكرت تماما - توجد لانهايات كبيرة ومختلفة إضافة لذلك فإن أصغر هذه اللانهائيات هي رئيس مجموعة الأعداد الطبيعية  $\omega$  (ألف صفر) أما اللانهائية التي يعبر بها عن رئيس مجموعة الأعداد الحقيقية فهي  $\omega^2$  أو يرمز لها بـ  $\omega^2$

يتبع من ذلك، بالتأكيد أن  $x_0 > x_1$

وفي الحاشية لقد فكر الرياضيون طويلا فيما إذا كان  $x_0 \geq x_1$

س - ماهذا الذي تقول ؟ هل قررت أن تمت بـ ؟ أم أنت تعدى عيا لدرجة أنه لا أمل أن أفهم أي شيء في الرياضيات ؟ كيف يمكن أن تتصور وجود لاهابير (  $x_0$  و  $x_1$  ) ؟

ج - هدى من روعك ولاداعي للعصب إصافة إلى أنني لست 'ن' من يقول هذا وإنما الرياضيات، ولقد كنت قد قرأت في مكان ما أنه يمكن برهان ذلك رياضيا، ولكني أنا الآن على محله من أمري، فاعدري، عني أن أنصرف....

(حسنا فعلت أنني لم أحبره عن وجود  $x_0$  أيضا) •

هل يمكن أن يكون:  $10 + 10 = 100$  ؟

س - ماهذا السؤال السخيف ؟ إن كل طفل يعرف أن  $10 + 10 = 20$

ج - بالتأكيد السؤال عبر عادي، ولكنه ليس سخيفا لأن الآلات الحاسبة الحديثة تحسب هذا الشكل.

س - هذا يعني أن الآلات الحاسبة الحديثة تقع في الخطأ ؟

ج - بالطبع لا. الآلات لا تخطئ، ولكنها وبساطة، تقوم بحسابات حسابية معه نظام عد آخر هو نظام العد الثنائي فيما هو مكتوب في العمود يعني  $2 + 2 = 4$  ولكن الكتابة بلغة العد الثنائي الذي لم تعد عليه ولا ستعممه (عاده)

• برز من أزيد الوضوح بصرى أن الترميزين طرحو مسألة سخت إذ كان هذا بيت للأعداد الكبيرة مثل  $2^{100}$  (تعد واحد) مثلا (عد ثنائي) فهو حل في ترتيب الأعداد الطبيعية وذلك البرز عن موضع 2 من هذه الأعداد. وقد برز جود ذلك في عام 1981 أنه إذا عد ان مثلا 2 فهو نظرية مجموعات - تتجلى عن مقادير كسور على مساهمة وكذلك في كوهن (Chen) في عام 1963 أن بقي هذا سدا في لا حل بدت لاسو. فبذلك يساهم (مساهمة) بوزي عد الفيدس - قد حددت بوحية عد فيدس لتتحقق عن الفيدس لا فيدس. أراد عبره فستحصل عن الفيدس أولا فبيدي

في عملياتنا الحسابية، ومع ذلك فإن نظام العد الثنائي حساس ومزايا كثيرة وسوف نحاول أن أوضح لك بعضا من هذه المزايا بعد أن نتعرف على هذا النظام. نحن نكتب كل الأعداد في نظام العد العشري المؤسس على العدد عشرة. في هذا النظام للعدد نكتب الأعداد بواسطة الأرقام العشرة التالية:

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩.

إضافة لذلك، فإن كل رقم في أي عدد لا يملك فقط قيمة عددية (لكونه ٦ أو ٧) ماذا نعني بذلك؟

إذا أخذنا العدد ٦٦٦٦ مثلا فهو مؤلف من أربعة أرقام متساوية هي الرقم ٦. إذن كلها تملك نفس القيمة العددية (٦) ولكن في نفس الوقت، فإن لكل رقم منها قيمة أخرى مرتبطة بموضع هذا الرقم في العدد كنه. فإذا نظرنا إلى الأرقام المكونة لهذا العدد من اليمين إلى اليسار كان الأول منها يعني عدد الوحدات (الوحدات) والثاني هو عدد العشرات، والثالث هو عدد المئات، والرابع هو عدد الآلاف.

وفي النظام العشري نعبر عن هذه القيم العددية للأرقام بواسطة حشرها بالقوى الصحيحة للعدد عشرة:  $١٠^١$   $١٠^٢$   $١٠^٣$  .. وهكذا للعدد ٦٦٦٦ يمكن كتابته بالشكل:

$$٦٠ \times ١ + ٦٠ \times ١٠ + ٦٠ \times ١٠٠ + ٦٠ \times ١٠٠٠ = ٦٦٦٦$$

$$١ \times ١ + ١٠ \times ١٠ + ١٠٠ \times ١٠ + ١٠٠٠ \times ١٠ =$$

10 - حاول أنت الآن أن تكتب الأعداد:

١٩، ٢٣٤، ٩٠٣، ١٤٦٩

بإستخدام الأرقام (٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩) والقوى الصحيحة للعشرة

وإذا أخذنا أساس العد عددا أكبر من العدد ١٠ عندئذ يجب أن ندخل أرقام جديدة، غير أن كتابة أي عدد سوف تصبح أقصر مثلا: إذا اعتمدنا نظام

العدد الساعي (الذي أساسه العدد ١٢) عندئذ يصبح أي عدد - مهما يكن كبيرا - هو واحد الأعداد التالية فقط. (١، ٢، ٣، ...، ١٢)

والعدد ١٥ في نظام العد العشري سوف يصبح ٣ في نظام العد الساعي والعدد ١٠٩ في نظام العد العشري هو ٩ في نظام العد الساعي وإذا أخذنا أساس العد عددا أصغر من العدد ١٠ فمعدئذ سوف يلزمنا رموز أقل لكتابة أي عدد، ولكن الكتابة تصبح أطول بكثير مثلا. عندما يأخذ نظام العد الثاني، أي نظام العد الذي أساسه ٢ عندئذ يكفي رمزان لكتابة أي عدد مهما يكن كبيرا، هذان الرمزان هما ١، ٠ (الصفر والواحد) أما العدد ٢ فهو يلعب دور العشرة في العد العشري.

لر كيف يكتب العدد نفسه في النظام العشري والنظام الثاني.

في النظام العشري في النظام الثاني

$$١ = (٢ \times ٠ + ١ = ١)$$

$$١٠ = (٢ \times ٠ + ١ \times ٢ = ٢)$$

$$١١ = (٢ \times ١ + ١ \times ٢ = ١ + ٢ = ٣)$$

$$١٠٠ = (٢ \times ١ + ٠ \times ٢ + ١ \times ٢ = ٢)$$

$$١٠١ = (٣ \times ١ + ٠ \times ٢ + ١ \times ٢ = ١ + ٤ = ٥)$$

30 - والآن حاول أن تكتب الأعداد التالية في نظام العد الثاني

$$١٧، ٢٣، ٤٥، ١١٥، ٣٢٤، ٦٤٠، ...$$

وهذه بعض الأمثلة الأخرى:

$$١١٠ = (٢ \times ٠ + ١ \times ٢ + ١ \times ٢ = ٢ + ٤ = ٦)$$

$$١١١ = (٢ \times ١ + ١ \times ٢ + ١ \times ٢ = ١ + ٢ + ٤ = ٧)$$

$$١٠٠٠ = (٢ \times ٠ + ٠ \times ٢ + ٠ \times ٢ + ١ \times ٢ = ٢)$$

$$١٠٠١ = (٢ \times ١ + ٠ \times ٢ + ٠ \times ٢ + ١ \times ٢ = ١ + ٨ = ٩)$$

$$١١٠٠١٠٠ = (... = ٤ + ٣٢ + ٦٤ = ١٠٠)$$



لقد مللت من هذه الكتابة . حاول أن تجيب على السؤال الذي طرحته عليك  
وإن تكتب الأعداد التي أعطيتك إياها بالظام الثاني . أعتقد أنك  
استوعبت طريقة تحليل العدد وفق قوى العدد ٢ وذلك أثناء الانتقال بالعدد  
من النظام العشري إلى النظام الثاني فمن السهل أن نحيط أن :

$$١٦ = ٢^٤ \quad ٣٢ = ٢^٥ \quad ٤ = ٢^٢ \quad ٢ = ٢^١ \quad ١ = ٢^٠$$

$$٢٥٦ = ٢^٨ \quad ١٢٨ = ٢^٧ \quad ٦٤ = ٢^٦ \quad ٣٢ = ٢^٥$$

والآن يمكنك أن تتحقق بنفسك أن في النظام العشري :  $٤ = ٢ + ٢$  ، أما في

النظام الثاني فإن  $١٠٠ = ١٠ + ١٠$

فجدول الجمع في النظام العشري هو

$$٠ = ٠ + ٠ \quad ١ = ٠ + ١ \quad ١٠ = ١ + ١ \quad \dots \text{ وهكذا فإن :}$$

$$١٠٠ = ١٠ + ١٠$$

ونقرأ : صفر مع صفر يعطي صفراً (ونكتب صفراً)

واحد مع واحد يعطي ١٠ (ونكتب اثنين . ولكن في النظام الثاني أي ١٠) ،

فإذا أردنا جمع  $١٢ + ١٣$  في النظام الثاني فإننا نكتب ذلك بالنظام كما يلي .

$$\begin{array}{r} ١١٠٠ \\ + ١١٠١ \\ \hline ١١٠٠١ \end{array}$$

يمكن استخدام هذا النظام الثاني أيضاً في العمليات الحسابية الأخرى

الضرب والطرح والتقسيم ، والرفع لقوة . .

فجدول الضرب مثلاً هو :

$$١ = ١ \times ١ \quad ٠ = ١ \times ٠ \quad ٠ = ٠ \times ٠$$

س - حسناً . إن كل مادكرته لي عن النظام الثاني شيء جميل ، ولكني مع ذلك لم

أفهم لماذا يحتاج هذا النظام عن النظام العشري إذا كنا نستخدم من أجل

كتابة أي عدد فيه رموز أكثر مما نستخدم في النظام العشري ؟

ج - أنت محق . فكتابة العدد في النظام الثاني ليس عملية بسيطة ، ولذلك فهذا

نظام للعد لا يستخدم في الحياة اليومية ، تصور مثلاً كم سيكون لك من الحبوب لو صعد البقود في ادا كانت مكتوبة بالنظام الثاني ، ولكنك تصرفها وكأنها مكتوبة بالنظام العشري ؟ (أي بدل ان تصرف مبلغ ليرتين المكتوب بالنظام الثاني ١٠ ، فأنت تصرفه وكأنه مكتوب بالنظام العشري أي تصرف عشر ليرات) ، ومع ذلك فالنظام الثاني للعد له العديد من الميزات وأول هذه الميزات أنه يستخدم لكتابة الأعداد فيه رمزان فقط وليس من الضروري أن يكون هذان الرمزان هما الصفر والواحد . فالرمزان يمكن أن يكون خطين صغيرين أحدهما أفقي والآخر عمودي أي (- ، ١) وقد يكون الرمزان بقصة وحفظاً (٠ ، -) أو مصباحاً كهربائياً

(المصباح مضيء ، المصباح مطفأ) فإذا استخدمنا المصباح يمكن أن نجعل بالشكل التالي :

$$\begin{array}{r} \text{أو : } 101 \\ + \quad 110 \\ \hline 1011 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{أو : } \text{○●○} \\ + \quad \text{○○●} \\ \hline \text{○●○○○} \end{array}$$

باعتبار : ○ - المصباح مضاء  
● - المصباح مطفأ .

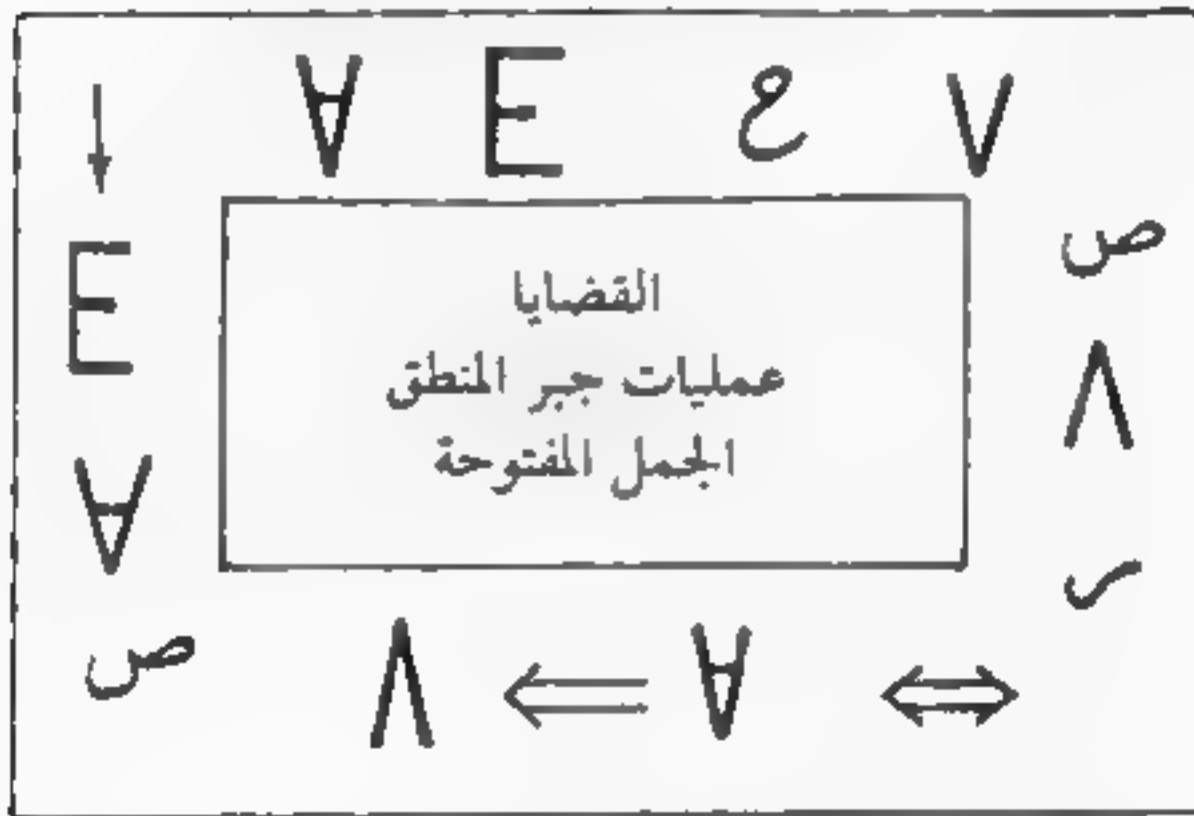
31 - بالتأكيد لقد عرفت ماتعبيه الصورة السابقة وهي  $11 = 6 + 5$

وهذه الميزة للنظام الثاني في عمل الآلات الخامسة ذات العمليتين السريعة ، مادام أنه بواسطة الوصل والفصل الكهربائيين يمكن تحقيق الرمز ١٠ ، ١ مئات المرات وسرعة إذ أن : المصباح مضاء ١ ، المصباح مطفأ ٠ ملاحظ أنه بهذا الوصل يمكن تحقيق الرمز ١٠ ، ١ مئات بل آلاف المرات في ثانية واحدة . وأطري أيضاً أن طول كتابة العدد في هذه الحالة ليس له أي

اهمية وهكذا. . إذا رأيت في المستقل كتابة رياضية وراودك الشك في  
امكانية الحكم على صحتها فعليك ألا تحكم مباشرة بعدم صحتها. يجب أن  
تتساءل أولا (في أي نظام من أنظمة العد يمكن أن تكون هذه الكتابة  
صحيحة؟)



الفصل الثالث  
عمليات جبر المنطق الجمل المفتوحة



ج - هل أعجبتك صورة العنوان؟ اعتقد أنها تعبر عن نفسها بدقة

س - بالطبع أعجبتني . أولاً يمكن أن تكون أكثر جمالا من هذا ، وأنا لا أستطيع أن  
امتلك نصي من السعادة عندما أقرأ مثل هذه العذوب 11 ولكني مع ذلك ،  
اعتقد أن العنوان غير كامل ، أليس كذلك؟

ج - غير كامل؟ من الممكن أن يكون العنوان غير كامل ولكن ... لا أستطيع  
أن أفهم ماذا تريد وراء تلميحك هذا؟

س - العنوان تنقصه إشارة استفهام كبيرة .

ج - أنت محق . ولكن قل لي رأيك بصراحة . حول أي شيء يدور الحديث وراء  
هذا العنوان؟

س - أعتقد أنه يدور حول المسائل .

ج - لا .

س - إذن يدور الحديث حول الإشارات والرموز

ج - لا لم تحرر بعد .

س - أعتقد أنها مقطع من رواية حديثة أو أنها مجرد مجموعة كلمات . من يدري ؟ .  
لا . مع ذلك فأنا أعتقد أنها عبارات ما رياضية .

ج - لقد اقترت من الحقيقة والعنوان يحوي الرموز والمصطلحات المستخدمة في الرياضيات الحديثة وبالأصح : في المطلق الرياضي

س - لقد تصورت ذلك أيضا رغم أنها لا تشبه الرموز الرياضية ولكن ماذا تعني هذه الرموز ؟

ج - سوف نتعرف على هذه الرموز والمصطلحات بشكل مختصر ، ونوضح جوهر هذه الرموز واستخدامها أثناء دراسة المفاهيم الأساسية للمطلق الرياضي .  
أي أننا سوف نقوم بترجمة هذه الرموز إلى اللغة العادية التي ستعمدها ، فهذه الرموز ماهي إلا اختصار لكلمات أو بدل بصع كلمات .

س - وماذا يدرس المطلق الرياضي ؟

ج - من الصعب أن نوضح ذلك في بصع كلمات ، ومع ذلك يمكننا القول إن المطلق الرياضي هو علم التفكير ، أو هو العلم الذي يبحث بتدريس أشكال التفكير المنطقي والعلاقة بينها ، والعمليات التي تساعد على تحقيقها . أما أشكال التفكير المنطقي فهي المفاهيم والقضايا .

### القضايا (العبارات)

س - ماذا يمكن أن يكون من القضايا (العبارات) في الرياضيات ؟ وهل لهذه القضايا أي علاقة بالقضايا التي تقام على الناس أو بالحكم القضائي عليهم ؟

ح - بالطبع لا يوجد ارتباط مباشر بينهما ولكن سؤالك لا يخلو من المطلق . فالقاصي كما هو معروف يمكن أن يعطي حكمه فقط على أساس الحدائق التي يتوصل إليها . وكذلك القصة في الرياضيات نهم على أنها تأكيد لبعض الحقائق مثلاً : الطلاب يحبون الرياضيات - هي قصة (عبارة) .

س - ولكن هذا غير صحيح فانا لآأحب الرياضيات

ح - لا بأس - في هذه الحالة سوف يطق القاصي بالحكم «القصة غير صحيحة» . أو «شهادة غير صحيحة» . والقصاصا في الرياضيات لا يمكن أن تكون عصرية . فالقصة ( لعارة ) يجب أن يكون لها معنى ويمكن أن نحكم عيه «أحدى الصفتين التآلتين :

القصة صحيحة أو القضية خاطئة

س - كيف يمكن أن نفهم الطلب : إن القصة يجب أن تكون ذات معنى ؟

ح - يمكن أن نهم ذلك بسهولة بالأمثلة : فالجملة الخيرية .

«القطار يرقص على أنغام الموسيقى مع المطر» ليست قصة لأنها بدون معنى ، ولذلك فحس لى بطرح هنا سؤالاً حول صحتها أو عدم صحتها غير أنه يجب أن يكون شديد الحذر فهناك بعض الحمل الخيرية التي تدو لبعض الناس أنها بدون أي معنى (أي ليست قصة) ، بينما تدو للأحرار أنها تحمل معنى محمداً - أي أنها قصة

س - هل يمكنك أن تعطني مثالا توصيحي ؟

ح - بيت هذا المثال : «كوكب الشرق تغني» - إن أولئك الناس الذين لا يعرفون أم كلثوم سوف يعتبرون أن ليس لهذه الجملة الخيرية معنى ، أما من يعرف أن أم كلثوم هي كوكب الشرق فسوف يعتبر العبارة ذات معنى - ومع ذلك فهذه الجملة الخيرية ليست قصة (عبارة) . وكما أن حر على حمة خيرية ليست قصة يمكن أن يورد هذا الإعلان المذبح لأحد أصحاب المطاعم «اليوم ندفع الحساب وعدا تأكل مجاناً» فهو سطحي أن يكتنه شكك أكثر ساطة كما يلي

«عندما يقدم الطعام مجانياً». فالمصصة يجب أن تكون حملة خيرية صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت الحملة الخيرية صحيحة وخاطئة في نفس الوقت فهي ليست قصة.

س - وهل توجد حمل خيرية صحيحة وخاطئة في نفس الوقت؟

ج - نعم توجد مثلاً أنا داهب إلى المدرسة. هذه حملة خيرية ذات معنى، ولكن الآن خاطئة، ومن الممكن أن تكون صحيحة (في ذلك الوقت الذي أكون فيه ذاهباً إلى المدرسة).

س - هذا واضح ولكن هل توجد حمل خيرية لا يمكن أن نقول عنها إنها صحيحة، ولا يمكن أن نقول إنها خاطئة.

ج - يوجد مثال عليها: نشرة الأخبار الخوية.

س - حسن، لقد فهمت. والآن أحري هل الحملة الخيرية:  $4 + 3 = 7$  قصة؟

ج - بالطبع هي قصة، إضافة إلى أنها قصة صحيحة. ولكي لا يصعب الرياضي إلى إبراز الحمل الخيرية التي تؤلف قصايا فإنه يستخدم رموزاً أو أحرفاً، كـ، ل، ... للدلالة على هذه القضايا مثلاً:

$$ق = 4 + 3 = 7$$

وعندما يتحدث أو يصف المساواة  $7 = 4 + 3$  فإنه يكتب في بدلا من الحملة الخيرية المطولة.

س - مفهوم إذن الرياضي يكتب (ق صحيحة) بدل القول (القصة  $7 = 4 + 3$  صحيحة)

ج - لا. الرياضي يكتبها بشكل أكثر اختصاراً. فهو يرمز لصححة بالرمز ص (أو لوحد)، ويرمز لخاطئة بالرمز ح (أو الصفر)

س - هذا الشكل ستكون العبارة مختصرة جداً أثناء الكتابة.

ج - وهذا ما كنت قد أحترت لك به: إن الرياضي لا يجب أن يكتب كثيراً شعاره

دائماً كلما كانت الكتابة أكثر اختصاراً كلما كانت أكثر وضوحاً وبها إضافة لذلك فإن ما يهتم الرياضيين هو قيمة هذه القضية (صحيحة أو خاطئة) وليس ما تحويه هذه القضية من معلومات أي أن ما يهتمهم هو ص، خ التي تنم عنهما القضية وليس أكثر من ذلك.

عمليات المنطق الرياضي، أو كيف يمكن أن نحصل على قضية جديدة من قضايا معروفة؟

س - هل يمكن أن يجري على القضايا عمليات الجمع والطرح والصر كما هي الحال في الأعداد؟

ج - العمليات على القضايا ليست تماماً نفس العمليات على الأعداد، ولكن يوجد بعض الشبه بينهما تذكر أما استخداماً أيضاً العمليات على المجموعات (القاطع والاحتماح و... ) وحصلنا بالناح على مجموعات جديدة أما لعمليات الأساسية على القضايا فتبدو بالعاط عربية نوعاً ما. ولكن عليك ألا تحتج لأنك سوف تعتاد عليها بسرعة وسهولة.

س - وما أسماء هذه العمليات؟

ج - هذه العمليات تسمى أدوات الربط وهي -

و	$\wedge$	(الربط بـ و)
أو	$\vee$	(الربط بـ أو)
إذا ... فإن	$\Leftarrow$	(الافتضاء الرياضي)
إذا وفقط إذا	$\Leftrightarrow$	(التكافؤ)
العملية	$\neg$	نفي القضية

س - هل هذه أسماء العمليات ... أم أني أتذكر من حفظها أمدا

ج - أنت لست فرداً أو سعاد حتى ترددها ورائي مباشرة



سوف نبحث هذه العمليات بالترتيب وسوف نفهم ما يعني كل منها وهذا هو المطلوب.

### العملية $\wedge$

ح - هذه العملية يمكن أن نسميها كأداة الربط «و»

س - ولماذا «و» بالذات؟

ح - لأن هذه العملية تربط بين قضيتين ق<sup>١</sup> ، ق<sup>٢</sup> بأداة الربط «و» أي أنه إذا كانت ق<sup>١</sup> ، ق<sup>٢</sup> قضيتين فإن:

ق<sup>١</sup> ٨ ق<sup>٢</sup> قصة جديدة تعني أيضاً ق<sup>١</sup> و ق<sup>٢</sup> مثلاً

إذا كانت ق<sup>١</sup> = الطقس اليوم جيد ، ق<sup>٢</sup> = ذهب أحمد للترهة

فإن القصة ق<sup>١</sup> ٨ ق<sup>٢</sup> = (الطقس اليوم جيد) و (ذهب أحمد للترهة)

س - والقصة الجديدة هل هي صحيحة أم خاطئة؟

ح - صحة وخطأ لقصة الجديدة ق<sup>١</sup> ٨ ق<sup>٢</sup> مرتبطان بصحة وخطأ القضيتين ق<sup>١</sup> ،

ق<sup>٢</sup> . فالقصة ق<sup>١</sup> ٨ ق<sup>٢</sup> تكون صحيحة بالتعريف إذا وفقط إذا كانت كل

من ق<sup>١</sup> و ق<sup>٢</sup> صحيحتين.

س - وإذا كانت إحداهما خاطئة؟

ح - إذا كانت إحداهما خاطئة عندئذ ق<sup>١</sup> ٨ ق<sup>٢</sup> خاطئة أيضاً وبصورة عامة عند جمع

قضيتين بواسطة عملية ربط معينة فالقصة الناتجة قد تكون صحيحة وقد

تكون خاطئة فمن أجل القصة الناتجة سوف يكون لدينا أربع حالات

وهي

عندما	ق <sup>١</sup>	صحيحة	و	ق <sup>٢</sup>	صحيحة
عندما	ق <sup>١</sup>	صحيحة	و	ق <sup>٢</sup>	خطأ
عندما	ق <sup>١</sup>	خطأ	و	ق <sup>٢</sup>	صحيحة
عندما	ق <sup>١</sup>	خطأ	و	ق <sup>٢</sup>	خطأ

ويجب تعريف ق<sup>١</sup> ٨ ق<sup>٢</sup> (صحيحة وإذا وفقط إذا كانت كل من ق<sup>١</sup> و ق<sup>٢</sup>

صحيحين) فإن جدول الصواب للفصبة الناتجة في هذه الحالات الأربع يمكن اعطاؤه بالشكل التالي:

ق ١	ق ٢	ق ١ و ٢
ص	ص	ص
ص	خ	ح
خ	ص	ح
خ	خ	خ

س - ولماذا هذا الشكل للجدول بالذات؟  
 ح - كيف ولماذا؟ إن هذا الجدول هو ما نحصل عليه استنادا إلى تعريف عمدة الربط و. تذكر أن الفصبة ق ١ و ٢ - بحسب التعريف - صحيحة فقط في حالة ق ١ صحيحة و ق ٢ صحيحة، وفي بقية الحالات تكون ق ١ و ٢ خاطئة. والآن حاول أن تفهم وتفسر لنفسك هذا الجدول.  
 س - حقا، كل شيء واضح ومفهوم في الجدول.  
 ولكنني أتساءل. هل يمكن استخدام الرمز  $\wedge$  في حالة أخرى غير الفصباة؟  
 ح - بالتأكيد. ففي كل عبارة رياضية معقدة ومؤلفة من عدة عبارات مترتبة بعضها بأداة الربط و، يصح بدل أداة الربط و، الرمز  $\wedge$  مثلا.  
 لقد عرنا تقاطع المجموعات بالشكل

$$\begin{aligned} \text{ص} \wedge \text{ع} &= \{ \text{س} : \text{س} \wedge \text{ص} \wedge \text{ع} \} \text{ يمكن أن يكتفى بها:} \\ \text{ص} \wedge \text{ع} &= \{ \text{س} : \text{س} \wedge \text{ص} \wedge \text{ع} \} \\ \text{ص} / \text{ع} &= \{ \text{س} : \text{س} \wedge \text{ص} \wedge \text{ع} \} \\ \text{ص} \times \text{ع} &= \{ \text{س} \wedge \text{ع} : \text{س} \wedge \text{ص} \wedge \text{ع} \} \end{aligned}$$

\* نسمي هذا الجدول وجدول الصواب، أو جدول الصحة ونصنظر هنا إلى كات ق ١ و ٢ صحيحة أو خاطئة.  
 [الحرر]

س - هل يمكن اشاء جدول انصواب لعمليات أخرى عن القضايا؟  
 ج - بالتأكيد يمكن ذلك ولكن يجب أن نتعرف أولا على هذه العمليات وليت  
 العملية التالية

### العملية √:

ج - وهذه العملية تسمى أيضا العملية أو.  
 س - ولماذا تسمى «أو»؟  
 ج - لأن القضية الجديدة في ١ ٧ ق ٢ ستج من التقصيين في ١، ٢ ق ٢ وهي صحيحة إذا  
 وبفقط إذا كانت إحدى التقصيتين في ١ أو ٢ ق ٢ صحيحة. وليت مثلا على هذه  
 لقضية الجديدة. « يسجل في السنة الثانية من الجامعة أولئك الطلاب الذين  
 أتموا السنة الأولى بنجاح، أو أتمهم قد اجتازوا الامتحانات التكميلية»  
 من نواضع هذا أنه يكفي أن يكون الطالب محققا لإحدى القضيتين.  
 ق ١ = أتم السنة الأولى بنجاح. أو  
 ق ٢ = اجتاز الامتحانات التكميلية.  
 حتى نصح القضية الجديدة كلها صحيحة  
 إذن بالقضية الناتجة في ١ ٧ ق ٢ صحيحة إذا كانت إحدى مركبتها صحيحة  
 إذن في ١ ٧ ق ٢ تكون حاطة فقط في حالة كون ق ١ حاطة و ق ٢ حاطة.  
 هل تستطيع وضع جدول لهذه القضية ؟  
 س - بالتأكيد أستطيع وهذا هو جدول انصواب:

ق ١	ق ١	ق ١ ٧ ق ٢
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
ح	ح	ح

ولكن هل يستخدم الرمز  $\vee$  في مكان آخر؟  
 ج - بالتأكيد يمكن ان نستخدمه مثلاً عند تعريف اجتماع المجموعات مثلاً  
 $a \vee b = \{x : x \in a \vee x \in b\}$ .  
 ولنتقل إلى عملية أخرى على القضايا

### عملية الاقتضاء المنطقي :

ج - لتعرف الآن على عملية الاقتضاء المنطقي ، والتي يرمز لها بالرمز  $\Rightarrow$  وهذه  
 العملية تحدد العلاقة التي تربط بين السبب والمسبب ونقرأ إذا ...  
 فإن ... . مثلاً  
 إذا سقط المطر فإن الشارع يبتل ، إذا رمزنا بـ ق للقضية . سقط المطر ك  
 للقضية : الشارع يبتل  
 فإن ق  $\Rightarrow$  ك تعني أن «تحقيق ق يؤدي إلى تحقيق ك» . أو «ق تفتضي ك» ، أو  
 «من ق نتج ك» ، أو إذا تحققت ق فإن ك تتحقق»  
 إن القضية ق  $\Rightarrow$  ك ككل تعكس الرابطة بين ق ، ك تلك الرابطة التي يمكن  
 التعبير عنها بالكلمات كما يلي :  
 «لا يمكن أن تتحقق ق دون أن تتحقق ك» . فالأقتضاء في الواقع يتبع من  
 قصتين ، والقضية الناجمة بالأقتضاء (أي ق  $\Rightarrow$  ك) حاطة فقط في تلك  
 الحالة التي تكون القضية الأولى صحيحة والثانية خاطئة وفي بقية الحالات  
 يكون الاقتضاء (ق  $\Rightarrow$  ك) صحيح . إذن فجدول الصواب لهذه القضية  
 يكون على الشكل التالي :

---

• نرجع العزم على استخدام  $\Rightarrow$  في الرياضيات فلاشارة إلى أن القضية التي تعبر  
 عنها صحيحة وفي الحالات العامة يستخدم الرمز  $\Rightarrow$  بدلاً منها [المحرر]

ق $\Leftarrow$ ك	ك	ق
ص	ص	ص
خ	خ	ص
ص	ص	خ
ص	خ	خ

مثال عددي ، ق  $\equiv 2 \times 2 = 4$

ك  $\equiv 3 \times 3 = 9$

ق  $\Leftarrow$  ك صحيحة

مثال آخر : إذا كان ق  $= 2 \times 2 = 4$  (خطأ)

ك  $= 3 \times 3 = 9$  (خطأ)

فإن ق  $\Leftarrow$  ك صحيحة.

وهذا المثال مفرؤه كما يلي / إذا كان (حاصل ضرب)  $2 \times 2$  يساوي سبع فإن القضية  $6 = 2 \times 3$  صحيحة.

س - ما أعرب ذلك . إن هذا يعني أنه يمكن أن نوصل إلى قضية صحيحة انطلاقاً من قضيتين خاطئتين.

ج - نعم شيء من هذا القبيل . يمكن أن نورد أيضاً الأمثلة التالية على الاقتضاء .

■ إذا كانت الأوزة أسرع من الباص فإن  $2 + 3 = 5$  أو ■ إذا كان اليوم يساوي

٢٠ ساعة فإن الحسر فوق النهر مصروع من الخلوى

بحسب تعريف الاقتضاء (الاقتضاء خاطيء فقط في حالة كون المقدمة أو

القضية الأولى صحيحة والنتيجة أو القضية الثانية خاطئة) فإن القضية

• نود أن نشير لبعض المائدة - إلى أن الاقتضاء أو الاشتراط المنطقي لا يترص بالصورة

وجود علاقة بين قضية (عبارة) الشرط والقضية الثانية أو جواب الشرط في ق  $\Leftarrow$  ك

وهو توسع للاقتضاء الذي يصرص وجود مثل هذه العلاقة وهو توسع معيد رياضياً

[المحرر]

الاحيرة صحيحة وإذا تراءى لك أن هذا الأمر عريف بعض الشيء فلا  
تفتق لأن الفصية لا تنصص أي شيء خطير ذلك لأنه - وفق تعريف صحة  
الاقتضاء - لا يمكن لأحد أن يبرهن أن  $8 = 3 + 2$  أو أن اليوم يسوي ٢٠  
ساعة.

س - من كان يعتقد أنه يمكن أن نوصل في الرياضيات إلى فصية صحيحة انطلاقاً  
من قضيتين خاطئتين.

ج - حقاً ولكن تذكر أنه وفق هذا التعريف غير العادي فإن الفصية التالية  
خاطئة: «إذا كانت علامتك في الرياضيات صفراً فانت من المنارين» وذلك  
في حالة كون الفصية الأولى صحيحة (بالطبع)  
التكافؤ:

ج - لتعرف الآن على حالة خاصة أخرى من الاقتضاء، تلك الحالة التي يمكن  
تعبير أماكن القضايا في، ك فيها أي تلك الحالة التي تكون فيها  $\Leftarrow$  ك  
صحيحة، وك  $\Leftarrow$  ق صحيحة. وسوف نوضح ذلك بأمثلة متعددة. وكر  
الآن ثم أجب على السؤال التالي:

إذا كانت لدينا الفصية «إذا هطل المطر فإن الشارع يتل» فهل يمكن أن  
نستخرج الفصية التالية «إذا كان الشارع متلاً فإن المطر هطل»؟

ج - واضح أن هذه النتيجة ممكنة ذلك أن الشارع لا يمكن أن يكون متلاً ما لم يهطل  
المطر.

ج - هذا غير صحيح تماماً فقد تكون مبرة البلدية هي التي قامت برش لشارع  
بالماء.

ج - آه. نعم هذا ممكن.

ح - لذا يجب أن يكون حدين في إعطاء النتائج. ويجب أن نأخذ بعين الاعتبار  
كل الامكانيات لطرية إذن في مثالنا إذا كانت الفصية «إذا هطل المطر فإن  
الشارع يتل» صحيحة فإن النصيب المعاكسة (إذا كان الشارع متلاً فإن المطر

قد هطل) ليست صحيحة بالضرورة ولكن إذا كان لدينا مستقيمان متوازيان س، ع، يمكن أن نكتب القضية المركبة التالية: «إد كان المستقيم س يوازي المستقيم ع فإن المستقيم ع يوازي المستقيم س»، أو اختصاراً «إذا كان س // ع فإن ع // س».

هل تكون القضية المعاكسة صحيحة في هذه الحالة؟

أي هل القضية :

س \_\_\_\_\_

ع \_\_\_\_\_

«إذا كان ع يوازي س فإن س يوازي ع» صحيحة؟

س - في هذه الحالة لا يوجد جدال على الصحة المطلقة لهذه العبارة.

ج - صحيح، أنت على حق. فإذا رمزنا للقضية س // ع بـ ق، والقضية

ع // س ب ك فإن : ق = س // ع ، ك = ع // س

عندئذ يكون : ق  $\Leftarrow$  ك و ك  $\Leftarrow$  ق.

في هذه الحالة نقول إن القضيتين ق، ك مرتبطتان بواسطة علاقة التكافؤ، أي

أن القضيتين ق، ك متكافئتان، ونرمز لذلك بالشكل  $\Leftrightarrow$  فبدلاً من أن

نكتب : ق  $\Leftarrow$  ك و ك  $\Leftarrow$  ق نكتب ق  $\Leftrightarrow$  ك ونقرؤها تكون ق إذا

وفقط إذا كانت ك

نأخذ مثلاً آخر. لدينا القضية المركبة التالية: «إذا كان المثلث ب ج د قائم

الزاوية فإن نظرية فيثاغورس تتحقق في هذا المثلث» وهذه قضية

صحيحة.

لأخذ القضية المعاكسة: «إذا كانت نظرية فيثاغورس محققة في مثلث ب ج د

فإن هذا المثلث قائم الزاوية» وهذه أيضاً قضية صحيحة فإذا رمزنا

للقضية الأولى «المثلث ب ج د قائم الزاوية» بـ ق والثانية «نظرية فيثاغورس

تتحقق في هذا المثلث» بـ ك فإن القضية المركبة الأولى يمكن كتابتها على

الشكل ق  $\Leftarrow$  ك، والقضية المركبة الثانية نكتبها على الشكل ك  $\Leftarrow$  ق في

هذه الحالة تكون النصان ق، ك متكافئتين ويرمز لذلك بأحد الأشكال

الرياضية التالية

ق  $\Leftrightarrow$  ك، أو ك شرط لازم وكاف لـ ق، أو الشرط ق يكافئ الشرط ك  
 فهل أدركت الآن ماذا يعني بالكثافة : «ق  $\Leftarrow$  ك و ك  $\Leftarrow$  ق»  
 من - نعم هذه الكثافة تعني أنه . تتحقق ك إذا تحققت ق، وتتحقق ق إذا تحققت ك.

ج - صحيح . ويمكن أن نعبر عنها بالشكل «ق  $\Leftrightarrow$  ك أي أن - (ق  $\Leftarrow$  ك)  $\wedge$  (ك  $\Leftarrow$  ق) = ق  $\Leftrightarrow$  ك . ويمكن فهم هذه المساواة كتعريف للكافؤ والقضية ق  $\Leftrightarrow$  ك تكون صحيحة فقط في تلك الحالة التي يكون فيها ق، ك صحيحتين معاً الدرجة . أي أن القضية ق  $\Leftrightarrow$  ك تكون صحيحة عندما تكون القصيتان ق، ك صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً . أما جدول الصواب لهذه القضية (قضية التكافؤ) فهو على الشكل التالي

(يكتب جدول صواب ق  $\Leftrightarrow$  ك ويربطه بجدول صواب القصيتين .  
 ق  $\Leftarrow$  ك و ك  $\Leftarrow$  ق) يورد هنا بعض الأمثلة والجدول .

ق $\Leftarrow$ ك	ك $\Leftarrow$ ق	ق $\Leftrightarrow$ ك
ق = 2 + 2 = 4	ك = 4 + 3 = 7	ق $\Leftrightarrow$ ك ص
ق = 2 + 2 = 4	ك = 4 + 3 = 7	ق $\Leftrightarrow$ ك ح
ق = 2 + 2 = 3	ك = 4 + 3 = 7	ق $\Leftrightarrow$ ك ح
ق = 2 + 2 = 5	ك = 4 + 3 = 8	ق $\Leftrightarrow$ ك ص

ق	ك	ق $\Leftarrow$ ك	ك $\Leftarrow$ ق	ق $\Leftrightarrow$ ك
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص

• يود أن يسهل إلى أن القراء العامة للقضية ق  $\Leftrightarrow$  ك هي «ق إذا وفقط إذا ك» كما نرى في  
 مكافئ ك إذا كنت ق، ك صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً والقصيتان المتكافئتان هما قصبتا  
 الحملان نفس قيمة النسخة . ويود كذلك أن يسهل القارئ إلى اختلاف مفهوم التكافؤ عن  
 التكافؤ بين المجموعات . وعلى الرغم من ذلك هذا الجدول يسمى جدول التكافؤ بلغة  
 [المعبر]



إن كل هذه العمليات التي تعرفنا عليها، أي عمليات الربط - أو، والربط ب  
و، الاقتضاء، التكافؤ، هي عمليات ثنائية

س - وماذا تعني بعمليات ثنائية

ح - العمليات الثنائية الثنائية الثنائية هي العمليات التي تربط بين قصتين ونتاج الربط  
يعطي قصة جديدة

نفي القضية :

س - هل يوجد عملية تستطيع بواسطتها الحصول على قصة جديدة انطلاقاً من  
قضية واحدة معروفة؟

ح - نعم يوجد مثل هذه العملية وهي عملية النفي ونرمز لها بـ  $\neg$  وقرأ نفيًا.

س - هل هذا يعني أنه إذا كانت لدينا قصة  $Q$  فإن  $\neg Q$  هي (نفي  $Q$ )؟

ح - نعم . والقصة  $\neg Q$  صحيحة فقط في حالة كون  $Q$  خاطئة والعكس صحيح  
لذلك فإن جدول الصواب بسيط جداً أي أنه إذا كانت القضية  $Q$  هي :  $P$   
أحب الرياضيات.

س - عددئذ سوف أقول عن نفسي اختصاراً  $\neg P$  ( لا أحب الرياضيات)

ح - صح أنرى كم هي بسيطة هذه العملية؟

ق	م
ص	ح
ح	ص

• سمي هذه العملية «حادثة» إذ يجري تطبيقها على قصة واحدة بخلاف العملية الاندائية  
(أو ثنائية) التي يجري تطبيقها عن قضيتين معاً

( المحرر )



شيء، ومع ذلك فإن جبر المنطق شيء جيد لأنه لا يحوى أي قوانين

ج - لا يحوى أي قوانين؟ إنك تعطى، كثيرا كيف يمكن أن تكون ويصبت بدون قوانين وحسابات؟

س - وكيف تعرف القانون في جبر المنطق؟

ج - قانون جبر المنطق هو: عبارة مؤلفة من ثوابت ومتغيرات والعمليات ٧، ٨،  $\Rightarrow$ ،  $\Leftarrow$ ،  $\leftrightarrow$ ،  $\neg$  باستخدام الأقواس (أي أن العمليات ٧، ٨،  $\Rightarrow$ ،  $\Leftarrow$ ،  $\leftrightarrow$ ،  $\neg$  تؤثر على القضايا كعمليات ثنائية).

س - لقد ذكرت أنه يوجد ثوابت فما هذه الثوابت؟

ج - لثوابت هي القيم ص، ح، إذن فالمجموعة التي نحدد السية الخبرية والتي نسمى جبر المنطق مؤلفة من عنصرين، أي (ص، ح).

س - وما المتحولات أو المتغيرات؟

ج - هي الرموز أو الأحرف س، ع، ص، ق، ك... التي يرمز فيها للقضايا

س - كيف نشئ، إذن قواعد جبر المنطق؟

ج - نشئها ببساطة على الشكل التالي:

$$ق = (ق \ ٨ \ ك) \ ٧ \ ل.$$

$$ك = س \Rightarrow ص.$$

$$ل = س \ ٧ \ (س \ ٧ \ ع) \Rightarrow ص.$$

$$س \ (ق \ ٧ \ ك) = (س \ ٧ \ ق) \ ٨ \ (س \ ٧ \ ك) \ ٥.$$

$$س \ (ق \ ٨ \ ك) = (س \ ٧ \ ق) \ ٧ \ (س \ ٧ \ ك)$$

س - حسن ولكن كيف نعلم ما إذا كنا نستطيع وضع إشارة = بين هذه العبارات.

ج - هذا شيء بسيط يمكن أن نكتب جدول الصواب للعبارتين في الطرفين فإذا كانت لهما نفس قيم الصحة والخطأ في كل الحالات، ومن أجل جميع

الاحتمالات الممكنة لقيم القضايا المركبة لها، فإن هذا يعني أنه يمكن وضع  
إشارة = مثال، نأخذ القانون (١):

ق	ك	ق ٧ ك	مر (ق ٧ ك)	مر ق	رك	(مر ق) ٨ (رك)
ص	ص	ص	خ	خ	ح	خ
ص	خ	ص	خ	خ	ص	خ
ح	ص	ص	ح	ص	خ	ح
خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص

قيم الطرف الثاني

قيم الطرف الأول

س - تبدو وكأنها كلمات متقاطعة .

ج - فعلا إنها تؤلف كلمات متقاطعة منطقية إلى حد ما وهكذا فهي هذا الجدول

برهنا على صحة القانون ' مر (ق ٧ ك) = (مر ق) ٨ (رك )

فقد برهنا في الجدول أن العبارة في الطرف الأيمن تساوي العبارة في الطرف

الأيسر لأن قيم الصواب لهما متكافئة .

والآن حاول أن تبرهن بنفسك أن :

$$32. \text{ ق } ٨ \text{ ك} = \text{ك } ٨ \text{ ق}$$

$$33. \text{ ق } ٧ \text{ ك} = \text{ك } ٧ \text{ ق} .$$

$$34. \text{ ق } \text{ك} = \text{ك } \text{ق} .$$

وكذلك ابحث في قيم الصواب (الصحة) لكل ما يلي :

$$35. \text{ ق } \text{ك} = (\text{ك } ٨ \text{ رك}) .$$

$$36. \text{ ق } \text{ك} = (\text{ك } ٨ \text{ ق}) .$$

$$37. (\text{ق } ٨ \text{ ك}) = \text{ق} .$$

38. ك ع ( ق ٧ ك ) .

س - اعتقد ان هذه التمارين تكفي ، ولكن هاك شيء بهمي لم أعرفه بعد .

ج - ما هذا الشيء بالتحديد؟

س - بهمي ان أعرف ما هي مسلمات جبر المطلق؟ .

ج - لقد أثار اهتمامي أيضا هذا السؤال في وقت ما ، وقد سألت عنه أحد

الرياضيين ، وأنا أذكر أنه أخذ ورقة وقلما وكتب عليها مايلي :

ق ع ( ك ع ق ) .

( ق ع ك ) ع ق ع ( ك ع ل ) ع ( ق ع ل )

ق ع ( ك ع ق ٨ ك )

ق ٨ ك ع ق

ق ٨ ك ع ك

ك ع ق ٧ ك

ق ع ق ٧ ك

( ق ع ل ) ع ( ك ع ل ) ع ( ق ٧ ك ) ع ل

( ق ع ك ) ع ( ق ع ك ) ع ( ق ع ك )

ن ( ن ق ) ع ق

ثم قال هذه هي المسلمات الأساسية لجبر المطلق ، والتي نسمح ساء أي

نظرية فيه ، ويوجد إضافة لذلك مسلمات أخرى تتعلق بالجمل المفتوحة

ونظرية الأعداد .

لم يتبق لي بعد هذه المعلومات القيمة سوى ان أشكر هذا الرياضي بشكل يبدو

فيه أنني معجب بسهولة هذه المسلمات ووضوحها ودقتها المطقة

الجمل المفتوحة :

س - لقد ذكرت قل قليل " الجمل المفتوحة " فما هذه الاشياء الجديدة؟ أما أعلم

أنه توحد حمل في اللغة، ولكن هل توحد حمل في الرياضيات أيضا؟

ج - حس - يبدو أنك مهتم بهذه الحمل المفتوحة وسوف أوضحها لك

- احبي أولا هل العبارات التالية قصايا؟

س - تلميذ ممتاز، ع - عاصمة دولة اوروبية.

ص < ٧ .

س - هذه ليست قصايا طالما أننا نعرف من هو الطالب س، ولا نعرف ما هي

المدينة ع، ولا نعرف العدد ص لحكم على صحة العبارة أو على حقيقتها

ج - صحيح . واضح أنك قد فهمت تماما معنى قضية في الرياضيات.

إن مثل هذه التسميات تسمى في الرياضيات «محلا مفتوحة».

والآن أجب على السؤال التالي: هل يمكن للحمل المفتوحة أن تتحول إلى

قصايا؟

س - بالتأكيد إذا بدلنا س، ع، ص بقيم محددة فإنها تتحول إلى قصايا مثلا.

أحمد تلميذ ممتاز باريس عاصمة دولة في اوروبا

١١ < ٧

هذه قصايا، وقصايا صحيحة أيضا.

س - هل نستطيع إذن أن نوضح العلاقة بين القضية والجمله المفتوحة؟

س - نعم تصبح الجملة المفتوحة قضية عندما يأخذ المحلول فيها قيمة محددة

ج - هذا صحيح . أصف إلى ذلك أن الرياضيين يستخدمون عادة الرمز ٧

( وقرأ: من أجل كل أو لكل ) ليدل فيه على التعميم

فنحز بكتب مثلا ( ٧ س ) ق ( أي من أجل كل س في ق )

• لكي تكون هذه الجملة قضية يجب أن يكون هناك معيار لتحديد الطالب المشار كالمول  
بأن محله مثلا يريد ع ١٩٠

( المحرر )

إذا كانت  $\varphi \in S \Rightarrow \psi \in S$  فإن (٧س)  $\varphi \Rightarrow \psi$  يعني (من أجل كل  $s$  في المجموعة (١)، المتباينة)،  $\psi \in S$ ).

س - وهل يستخدم الرمز  $\psi$  في مكان آخر

ج - بالتأكيد نحن نستعمله بكثرة مثلاً: لنصوغ مفهوم المجموعة الحرة مستخدمين هذا الرمز نجد:

$\psi \in S \Leftrightarrow (\psi \in S \Rightarrow \psi \in S)$  هل فهمت كل شيء هنا؟

ج - بالتأكيد لقد كنت (س هي مجموعة جزئية من  $S$ ) تكافئ (كل  $s$  تنتمي إلى المجموعة  $S$  هي أيضاً عنصر من المجموعة  $S$ )

ج - جيد . والآن لركب نعرف نظرية المجموعات علاقة «يساوي».

$\psi \in S \Leftrightarrow (\psi \in S \Rightarrow \psi \in S) \vee (\psi \in S \Rightarrow \psi \in S)$

ويمكن أن نكتبها بالشكل:

$\psi \in S \Leftrightarrow (\psi \in S) \vee (\psi \in S)$ .

س - هذا شيء ممتع . ومع ذلك فإنا نحمد الله أنه ليس من الضروري أن أحيط مثل هذا التعريف . أعتقد الآن أنه لم يعد هناك رموز أخرى نتعرف عليها، وإلا فإننا سوف نسي الكلمات الحبة نفسها إذا كنا نستخدم الرموز فقط ورمزنا كل شيء.

ج - حقيقة توجد رموز أخرى لم نتعرف عليها بعد . مثلاً هناك رمز «المكمم» (يوحد على الأقل) ونرمز له بـ  $E$ .

س - ما هذا الرمز الغريب أيضاً؟

ج - لا يوجد هناك أي غرابة فهذا الرمز يعني «يوحد واحد على الأقل». وهذا الرمز هو خيال أو صورة (بالمرأة) للحرف  $E$  أترى أي أفكار تدور

(١) تستعمل (النسبة) في أكثر الاطوار العربية إلا أن البعض يستعمل المراجعة

(المعروف)

في رأس الرياضي ونخرج منه ليسكر لنا رموزاً جديدة؟  
 إذا كانت في - جملة مفتوحة فإن (  $\exists$  س ) ، في هي ب قضية نقرأ «يوجد على الأقل عنصر واحد س بحيث إن في محقق»<sup>\*</sup>

س - لم أكن أتصور أنه يوجد رمز له هذا المعنى .  
 ج - بالتأكيد . وإليك الآن بعض الأمثلة على استخدام هذا الرمز  
 إذا كانت س ، ع عناصر من مجموعة الأعداد الطبيعية أي أن :  
 س ، ع  $\exists$  ط ، وإذا كانت في جملة مفتوحة معرفة كما يلي :  
 في ( س ، ع )  $\exists$  س < ع فإن التعبير :  
 (  $\exists$  س ) في ( س ، ع ) تعني :

« يوجد عدد واحد س على الأقل بحيث إن س < ع » .  
 أما التعبير ، (  $\forall$  س ) في (  $\exists$  ع ) ( س ، ع ) فتعني :  
 « من أجل كل عدد س يوجد على الأقل عدد واحد ع بحيث إن س < ع » .  
 هل ترى أي منة حقيقية يسمحان إياها استخدام هذا الرمز؟  
 لنأخذ حقيقة أخرى :

من أجل أي عددين طبيعيين ب ، ج - يوجد عدد د يحقق الخاصة ب + ج = د  
 وإذا استخدمنا رموز المطلق الرياضي فإننا نكتب العبارة بالشكل .  
 (  $\forall$  ب ، ج  $\exists$  د ) ( ب + ج = د )  
 وهناك أمثلة كثيرة مثلاً ...

س - أشكرك . . هذا يكفي ولا داعي لأمثلة أخرى لقد امتلأ رأسي من هذه  
 المسألة . . .

ج - تقصد الحكم . . . . .  
 س - نعم . . . . .

\* رمز الحكم الوجود في كتاب المدرسة بـ E (الترجم)

\* إن (  $\exists$  س ) في قضية لانه يمكن الحكم على صحتها أو خطئها ، وكذلك فإن (  $\forall$  س ) في قضية ( المحرر )



ح - ان افهم انك قد نعتت من كل هذه الرموز و لتعاريف والقواعد والجداول، ولكن يجب عليك ألا تخاف منها، وإذا ظهرت أي ضرورة لاستخدامها سوف نستوعبها بالدريج، وعندما تريد أن تلهو بعض الشيء فبذلك تستطيع أن تجرب استخراج أحد جداول الحقيقة لمختلف العبارات، أو نحاول أن ننقل أي قصة كلامية إلى لغة ورموز لمطلق

س - ما أحد الأدن من الرموز الذي يجب على أن أعرفه في كل الأحوال؟

ح - اعتقد انه من الأفضل أن تحفظ - على الأقل - الرموز الأساسية، ومن الممكن أن تحفظ فقط امكانية استخدامها ومعناها.

س - وما هذه الرموز؟

ح - هذه الرموز هي :

ص رمز صحة القضية.

خ رمز خطأ القضية .

٨ أي ص - ٨ ع رمز لعملية الربط بـ و.

٧ أي ص - ٧ ع رمز لعملية الربط بـ أو

⇐ أي ص - ⇐ ع رمز للاقتضاء ( إذا كانت ص صحيحة

فإن ع صحيحة)

⇔ أي ص - ⇔ ع رمز للتكافؤ .

مرأي ص - رمز النفي .

٧ أي ( ص ) ق مكتمل التعميم . من أجل أي ص

تتحقق ق

E أي ( E ص ) ق مكتمل الوجود يوجد عنصر ع لـ

بحيث تتحقق ق.

أعتقد أن هذا يكفي كمدية لتعلم رموز المطلق

## المصدر الرابع بضع كلمات حول الرياضيات

هل من السهل اعطاء مسألة رياضية؟

أنا أعلم أنك سوف تجيبني نعم فأنا أستطيع اعطاء مسألة رياضية وبكى المشكلة هي كيفية حل هذه المسألة، فأت بحبيب دوماً هذا الشكل عندما يروح إليك المدرس مثل هذا السؤال ولكن هذا غير صحيح.

س - ولماذا؟ وهل هناك صعوبة في اعطاء مسألة رياضية؟

ج - لا بأس. سوف أعرض عليك بضعة أمثلة، وسوف ترى أن اعطاء مسألة رياضية ليس بهذه السهولة التي تتصورها، وسوف تدرك أنك قد تجد نفسك في موقف سخيف جداً فيما إذا أعطيت مسألة رياضية بدون تفكير (وشكل ارتجالي)، وبدون أن تجرب حلها قبل اعطائها. سوف أطرح عليك أولاً عشر مسائل سهلة، وعليك أن تحلها فوراً، وبعد ذلك سوف ناقش بالتفصيل كل مسألة وحلها. لنبدأ مرة أخرى من المجموعات. المسألة الأولى: لدينا مجموعتان. س = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥ } ع = { ١، ٣، ٥ } والسؤال هو: أي المجموعتين أكبر؟

س - لا يحتاج السؤال إلى أي تفكير. واضح أن س أكبر من ع.  
ح - لننتقل إلى المسألة الثانية.

المجموعات س، ع، ص، ق، ك معطاة كما يلي

س	مجموعة الكتب الجيلة.
ع	مجموعة الأطفال الأذكياء.
ص	مجموعة المدن الكبيرة.
ق	مجموعة الأشخاص البدينين.
ك	مجموعة النساء اللواتي يرتدين ملابس جميلة.

فهل هذه المجموعات معطاة بشكل جيد؟

س - اعتقد أن معطاة بشكل جيد . ولماذا يكون معطاة بشكل سيء؟

ج - أجب الآن على المسألة الثالثة:

إذا كان ثمن دفتر خمس ليرات فكيف يجب أن تدفع ثمن ثلاثة دفاتر؟

س - بإمكان أي طفل أن يجيبك على هذا السؤال وأصح أن ثمن ثلاثة دفاتر

سيكون خمس عشرة ليرة

ج - سؤال رابع: إذا وزعنا مجموعة طلاب مؤلفة من ستة عشر طالباً إلى أربع

ممر، فكيف طالباً يكون في كل زمرة؟

س - كل زمرة تتألف من أربعة طلاب.

ح - ولأن المسألة الخامسة: لديك أربعة كتب وحفيناك . فكيف طريقة يمكن أن

تضع هذه الكتب في الحفيتين؟

س - ثمانية طرائق.

ح - لننتقل الآن إلى الهندسة والمسألة السادسة: لدينا نصف مستقيم شعاع

ب س وصفت عليه نقطة ج فأي المستقيمين أكبر .  
 ب س أم ج س

س - سؤال غريب جداً . ليس هناك أدنى شك في أن ب س أكبر من ج س

ج - المسألة السابقة: مساحة

السطح المحصور بين مستقيمين

متوازيين؟

س - يمكن أن نحدد مساحة مصرط طول المستقيم بالبعد بين المستقيمين، دون

كأن يجب عليك أن تعطي البعد بين المستقيمين

س - حس . هل نستطيع أن نقول في الآن

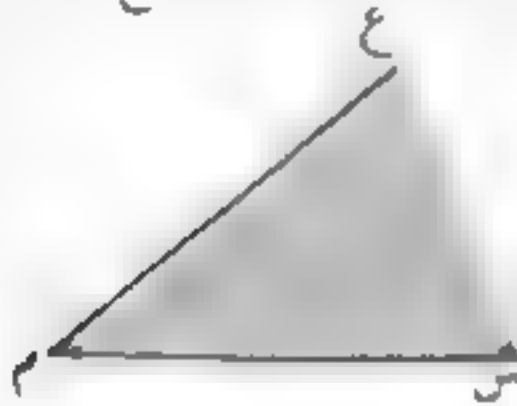
(مسألة ثامنة) أي الماسحتين أكبر

مساحة السطح سطا الواقع بين المستقيمين

أم مساحة السطح سطا الواقع خارج ق

المستقيمين ق

س - ان مساحة سطح سطا أكبر بالتأكيـد من مساحة السطح سطا



ح - والمسألة التاسعة عن الزوايا:

لنفترض أن الزاوية متشكل

بدوران نصف مستقيم

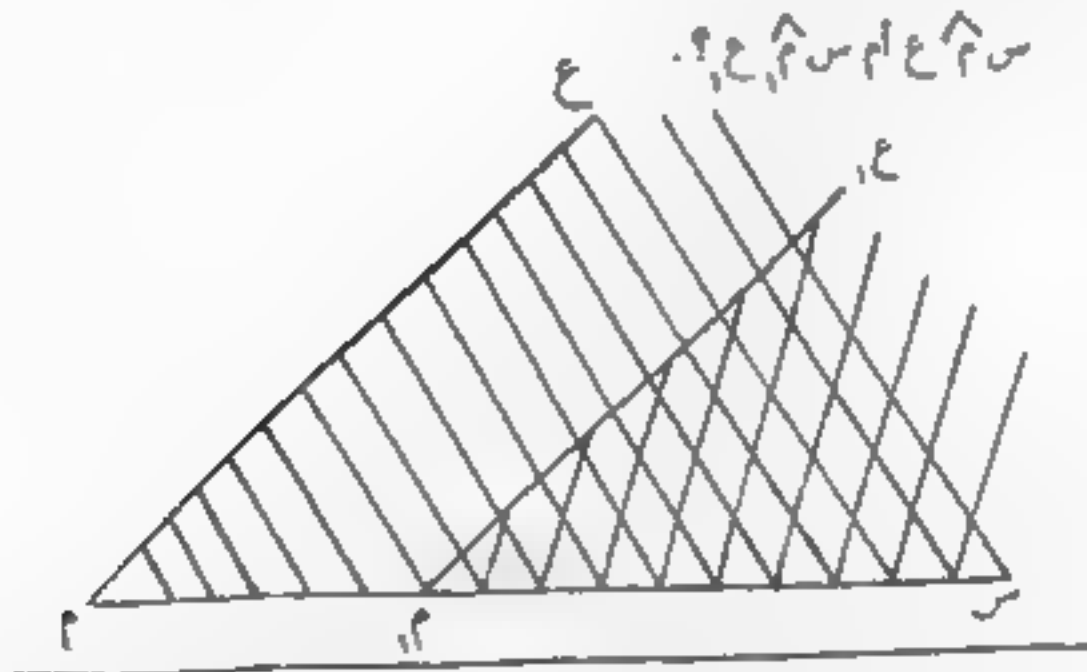
حول نقطة مفروضة، فالزاوية

نفهم منها السطح المحصور بين

نصبي المستقيمين م س ، م ع (ضلعي الزاوية) والمطل في الشكل

والآن قل لي:

أي الزاويتين أكبر (في الشكل المجاور)



• لا يتعين تعريف الزاوية هنا مع التعريف المألوف لدينا وهو اتحاد الشعاعين

م س ، م ع ، وما يعرفه المؤلف هنا بتدليل ما سببه المنطقة الزاوية

[ لحرر ]

س - لاحظ ان الزاوية من  $\hat{M}$  ع اكبر من الزاوية من  $\hat{M}$  ع، بذلك الجزء من المستوى المحصور بين نصفي المستقيمين م ع، م ع، ع، ع، ج - المسألة العاشرة:

إذا قمر مطلي من الطائرة فهل يسقط إلى الأرض وفق الخط العمودي الازل من الطائرة إلى السطح الأرض؟



س۔ وہل ممکن ان یسقط بشکل آخر؟

ج - السؤال الحادي عشر: هل الرفع إلى القوة الثانية (أي ع = س<sup>2</sup>) "نعم تطبيق متباين". أي: هل ع = س<sup>2</sup> تحقق فيه العلاقة  
 $s \neq s^2 \iff s \neq s^2$  ؟

من - طعا . ذلك أننا نعرف أن  $2^{\circ} = 3.4^{\circ} = 6.9^{\circ} = 36^{\circ}$  . أي أن العناصر  
المختلفة من المطلق  $(2, 3, 6, 9)$  . يقابلها قيم مختلفة في المستعر  $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$   
في  $36, 9$  .

( ١ ) تطبيق أكثر استعمالاً من ثلث

**[الحمراء]**

ج - والآن ، وبعد أن «أحت» وأعطيت حلولاً لجميع المسائل التي طرحتها عليك أستطيع أن أقول لك إنك لم تعط أي إجابة صحيحة إضافة لذلك ، فإن معظم المسائل لم تكن معطاة بشكل جيد

س - هذا غير ممكن . المسائل كانت واضحة جداً وبسيطة جداً .

ح - نعم . هي واضحة وبسيطة جداً ولكن فقط لأولئك الذين لا يعرفون رياضيات ، أو الذين يعرفونها معرفة سطحية .

لتناقش المسائل والحلول بالترتيب :

في المسألة الأولى كان السؤال : أي المجموعتين أكبر من- أم ع ؟ الخطأ في هذا السؤال هو أن المقارنة بين المجموعات لا تتم باستخدام «أكبر» أو «أصغر» (أي لا نستخدم < أو >) لذلك فلا يصح أن نساو أند ، حول المجموعات الكبيرة والصغيرة . إن علاقة «أكبر» أو «أصغر» ممكنة فقط بين الأعداد وللمقارنة المجموعات نستخدم علاقة الاحتواء (  $\supseteq$  و  $\subseteq$  ) وفي مثالنا يمكن أن نقول إن ع  $\supseteq$  س . وهكذا ، فإذا سألتك أحدهم «أي المجموعتين أكبر؟» تستطيع أن تتأكد مباشرة أن السائل لا يعرف أي شيء من المجموعات .

في المسألة الثانية :

المجموعات كلها معطاة بشكل غير صحيح ، ذلك أن . الكبير والحصل والدكي والبدين . . ليست صفات مستطيع أن يعرف بواسطتها وبالتأكيد ما إذا كان عنصر م ينتمي لهذه المجموعات أو لا ينتمي

س - حسن . ولكنني أعتقد أن المسألة الثالثة - عن ثمن ثلاثة دفاتر كان حلها صحيحاً .

ح - هذه المسألة ، والمسألة الرابعة أيضاً ، معطاة بشكل غير دقيق وغير صحيح يكفي أن نظري حقيقة أحد الطلاب لتجد هناك مختلف الدوائر ، منها ما

يكون ثمنه خمس ليرات ومنها ما يكون سعر الدفتر أربع ليرات

س - هذا صحيح وفي المسألة لا يوجد ما يشير إلى أن الدفاتر المشتراة متماثلة وسعر الدفتر منها يسوي خمس ليرات لقد أصبح مفهومنا الآن أن يوربع ستة عشر طالبا إلى أربع زمر قد تتم بمختلف الطرائق انهم فقط هو أن يكون مجموع الطلاب في الزمر الأربع هو ستة عشر طالبا

ج - هذا صحيح وكما نرى يجب أن تكون منها حدا ودقيقا جدا في اعطاء مسألة رياضية. فإذا 'جانبك' أحدهم مثلا - إن ثمن ثلاثة دفاتر ثلاث وعشرون ليرة، أو إنه في إحدى الزمر يوجد خمسة طلاب، وفي الزمرة الثانية يوجد ثلاثة طلاب، وفي الزمرة الثالثة والرابعة أربعة طلاب، فلا نستطيع أن نقول: إن إجاباتهم ليست دقيقة.

س - وما العيب في المسألة الخامسة؟

ج - المسألة الخامسة معطاة بشكل جيد وصحيح ولكنها أصعب بكثير مما نصورت. فكل رياضي يستطيع أن يجيبك / أن وضع أربعة كتب في حفتين يتم بست عشرة طريقة، ولستعرض منها هذه الطرائق: لمرمر للكتب بالأحرف ب، ح، د، هـ، وللحفائس س، ع.

١ - يمكن أن نضع في الحقيبة س كتابا واحدا (والثلاثة البقية في الحقيبة ع)، فنضع إما الكتاب ب أو ج أو د أو هـ. إذن هناك أربع طرائق لوضع كتاب واحد في الحقيبة س

٢ - يمكن أن نضع في الحقيبة س كتابين فنضع ب وج، أو ج ود، أو د وهـ، أو ب ود، أو ب وهـ، أو ج وهـ فهناك ست طرائق لوضع كتابين في الحقيبة س (وكتابين في الحقيبة ع).

٣ - يمكن أن نضع في الحقيبة س ثلاثة كتب هي: ب، هـ، د، أو ب، ح، هـ، أو ج، د، هـ، أو ب، ح، د فهناك أربع طرائق لوضع ثلاثة كتب في الحقيبة س (وكتاب واحد في الحقيبة ع).

إذن فقد وجدنا  $14 = 4 + 6 + 4$  طريقة ويمكن أن يصح لكتب الأربعة في الحقيبة من أوفي الحقيبة ع.

إذن هنا لدينا أيضا طريقتان ، ويصبح مجموع الطرائق  $16 = 2 + 14$  طريقة لوضع الكتب الأربعة في الحقيبتين.

س - حسنا. وما هو الخطأ في إحصائي على المسألة السادسة حول أنصاف المستقيمات؟

ح - السؤال هنا غير صحيح تماما كما كان عليه الأمر في المسألة الأولى حول المجموعات. فعلاقة أكبر غير معرفة على مجموعات نقاط مستقيم ولذلك فلا معنى لهذا السؤال، والمسألة حول المساحات أيضا لا معنى لها (المسألة السابعة والثامنة)

س - ولماذا؟

ح - ذلك أنا نتحدث عن مساحة السطح من أجل الأشكال الهندسية المحدودة فقط إذ أنا لا نسأل أبدا عن «مساحة القبة السماوية»؟

س - ولكن ليست مساحة سطح سطر ٢ أكبر من مساحة سطر ١؟

ح - هل نظن إجابتك صحيحة؟ حسن إذا استطعت أن تبرهن لي أن الأعداد

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ... أكبر من الأعداد ١٠١، ١٠٢، ١٠٣،

١٠٤، ... فسوف أوافق معك على أن سطر ٢ < سطر ١!

س - ولكني لا أستطيع أن أبرهن على أن العلاقة أكبر من أجل مجموعات الأعداد!!

ح - في هذه الحالة سوف تتابع معي مناقشة بقية المسائل

س - لقد تأكدت الآن أن السؤال حول الروايات لا معنى له أيضا

ذلك أنه إذا كانت الرواية جزءا من المستوى، فلا يمكن أن نحدد مقدارها،

ولا نستطيع مقارنة الروايات بعلاقة أكبر (تماما مثل المسألة حول المجموعات)

ح - هذا صحيح، والروايات يمكن مشاركتها فقط بعد أن نتعرف على قياس الرواية



محرر يستطيع أن نقول إن الراوية التي قياسها ٥٥ أكبر من الراوية التي قياسها ٤٥ ، ذلك أما أدخلنا لها قياس الزوايا ، ومحرر تعرف أن ٥٥ > ٤٥ . والعلاقة < يمكن استخدامها من أجل مقارنة الأعداد .

س - ومادا عن سقوط المظلي ؟ ألا يسقط بشكل عمودي ؟  
ج - لا بالتأكيد . لقد تعرفنا في الفيزياء ، بشكل كامل على مثل هذه المسائل ، وعرفنا أن سقوط المظلي يتم وفق مسار معقد جدا . هذا المسار في الحالة المثالية - يوافق قوسا من قطع مكافئ .

س - ولكن : لماذا  $E = S$  ؟ ليس تابعا نطيقا متاييا ؟  
ج - أما لم أقل إن هذا التابع غير متباين ولم أقل إنه متباين فمن الممكن أن تكون الإجابة على هذا السؤال بالنفي ، أو بالإيجاب . فالسؤال هنا معطى بشكل غير صحيح ، ذلك أنه لم يذكر في السؤال مجموعة تعريف التابع .

فإذا كانت مجموعة تعريف التابع هي ط وكان التابع  $E = S$  ما  $S = ط$  فإن هذا التابع سيكون متباينا  
أما إذا كانت مجموعة تعريف التابع هي  $S = ط$  فإن  $E = S$  ليس متباينا وهو تابع من  $S$  إلى  $S$  وكل قيمتين مختلفتين من  $S$  قد نوافقها نفس القيم للتابع في  $S$  .

مثلا : ٢ ، ٢ - ٣  $S = ط$  بينما ٢ = ٤ و ٢ = ٤ أي  $٢ = ١$   $S = ط$   
ولكن ما (٢) = ما (٣) (في هذا المثال) .

إذن فهذا السؤال غير دقيق ، ذلك أن الإجابة متوقفة على مجموعة تعريف هذا التابع .

س - هذا صحيح . معك حق ، إن إعطاء المسائل الرياضية بس سيطا إلى هذه الدرجة التي تصورتها .

ج - نعم إضافة لذلك فإنك تستطيع أن تحدد من شكل المسألة الموضوع - ما إذا كان واضعها يعرف الرياضيات بشكل جيد أو لا يعرف الرياضيات

## ماذا تدرس الرياضيات في وقتنا الحاضر؟

بدل الإجابة على هذا السؤال سوف أسألك لماذا لا تدرس الرياضيات؟ لأنه لا يوجد في وقتنا الحاضر أي مجال - تقريباً - للمعارف الإنسانية لم تدخل به الرياضيات، ولكي تتحقق من صحة كلامي، يكفي أن تعدد أهم أقسام الرياضيات في وقتنا الحاضر، تلك الأقسام التي أصبحت مادة تشغل الرياضيين في جميع الاختصاصات إليك بعض هذه الأقسام

- المنطق وأساس الرياضيات.
- نظرية المجموعات.
- نظرية الأعداد.
- النظرية الجبرية للأعداد ونظريات الحقول
- الحلقات التجميعية والجبر.
- الحلقات التوزيعية والجبر
- الهندسة التحليلية.
- التحويلات الهندسية.
- نظرية الرمر.
- الرمر التبولوجية وزمرة واي : Lie.
- النوايع الحيفية.
- نظرية القياس.
- النوايع العقدية.
- نظرية القدرة.
- النوايع الخاصة.
- معادلات تفاضلية
- معادلات تفاضلية جبرية
- تحويلات فورييه
- عمليات التكامل

- \* التحليل التابعي .
- \* طرائق العد (أنظمة العد) .
- \* المتباينات الهندسية .
- \* الهندسة التفصيلية .
- \* التولوجيا العامة .
- \* نظرية الاحتمالات
- \* نظريات التنوؤ .
- \* . . . (وهل هذه رياضيات؟) .

س - لقد اكتفيت . ولكن من أين جاءت هذه الأسماء الكثيرة؟ وهل جميع هذه «الأشياء» قد دخلت الرياضيات؟ لن أستطيع أن أحفظ أسماءهما (فقط) لقد كنت أعتقد أن الرياضيات حساب وهندسة وهذه المجموعات التي ظهرت في السنوات الأخيرة .

ح - نعم هذا ما يعتقدونه الكثيرون . ولكن هذا الاعتقاد صحيح فقط بالسنة للرياضيات التي كانت معروفة منذ ٥٠٠ إلى ٦٠٠ هـم .

ج - لقد ظهرت هذه الأقسام في أوقات مختلفة بعضها يبلغ من العمر ٣٠ سنة، وبعضها ٥٠ سنة، وبعضها ١٠٠ سنة أما البقية فأقدم بكثير

س - وهل يسعى عن كل إنسان يريد أن يصبح «عالم رياضيات» أن يدرس أولا جميع هذه المواد؟

ج - ومن قل لك ذلك؟ هذا غير ممكن بالطبع وغير ضروري ، ولو كان الأمر كذلك لأصبحت مجموعة الرياضيين - على الأغلب - مجموعة فارغة إن كل رياضي يعمل في مجال معين وبعض المجالات الأخرى القريبة منه ، أما من بقية المجالات فهو يعرف الشيء القليل . . . وغالبا ما يحدث عند لقاء رياضيين (من العصر الحديث) مختصين بمجالات بعيدة عن بعضها ، بحيث إن لكل منهما «لغته» الخاصة ، وغالبا ما يحدث أنهم بعد بضع دقائق من

المحادثة لا يبقى لديهم أي شيء يتحدثون فيه، وهذا ليس يحدث بالطبع فيما لو بدؤوا بالحديث حول المفاهيم الأساسية في الرياضيات، هذا إذا لم يبدأ أحدهم بجر الموضوع إلى مجال اختصاصه ليتحدث «بلغته» . . .

س - ألا يوجد - مع ذلك - ما يجمع الرياضيات المعاصرة في جميع مجالاتها؟

ج - الرياضيون يؤكدون على أنه في جميع مجالات الرياضيات المعاصرة يمكن أن نجد: المنطق، المجموعات والنسب، وهناك آخرون يعتقدون (إذا لم يعيروا رأيهم بهذا) أنه بالإمكان اشتقاق الرياضيات المعاصرة من نظرية المجموعات، وذلك بتوفر مناقشة منطقية دقيقة جدا.

مثلا: الجبر الحديث يدرس تلك المجموعات المعرف عليها عملية أو علاقة واحدة - على الأقل - أي مجموعات لها سمة، لا تتعلق بسوع العناصر الموجودة فيها. والمسألة الأساسية هنا - في الجبر الحديث - تنلخص في البحث عن البنى وخواص العمليات في البنى. وللاحظ هنا أنه يمكن أن نجد مجموعتين مختلفتين ولهما عناصر مختلفة تماما، ويكون لهما نفس البنية فيما إذا كان مطلقا عليهما نفس العملية - أو نفس قانون التشكيل الداخلي - ووظيفة الحصر الحديث تنلخص في كشف البنى المتماثلة للمجموعات ذات العناصر المختلفة.

إن الكشف عن شيء عام (أو شيء مشترك بين المجموعات) عند وجود اختلاف ظاهري فيما بينها (اختلاف المجموعات واختلاف قانون التشكيل المطبق عليها) هو أحد أهم وظائف الجبر الحديث. وإذا اعتبرت البحث عن هذا (الشيء العام) كلعبة فإن استراتيجية اللعب تحددها المفاهيم الأساسية للمصطلح الصوري ونظرية المجموعات أما قواعد اللعبة فهي العمليات الخبرية وخواص البنى وأما ساحة اللعب فهي بنى جبرية محددة. ولهذا السبب يعطى أهمية كبيرة لدراسة مختلف البنى الموحدة أمام الرياضيين في وقتنا الحاضر.

س - لقد تحدثنا عن أشياء كثيرة مختلفة، ولكننا لم نتحدث أبداً عن الهندسة  
والأليست الهندسة أوسع محالا في الرياضيات؟

ح - أنت على حق فالهندسة مهمة جدا، إضافة إلى أنها محال قديم جدا، من  
محالات الرياضيات. فبدأ الهندسة بحدها في مصر القديمة حيث تطورت  
في ذلك الوقت بشكل عاصف بسبب ضرورتها لقياس الأراضي المروعة،  
وبحسب لم نتحدث عنها لأننا - وبساطة - لم نجد الوقت لذلك، فقد تحدثت  
عنها في وقت آخر حتى لا يعانينا أحد لأننا لم نذكرها أبداً. أحبي على السؤال  
التالي:

ما الهندسة؟

س - الهندسة... الهندسة... هي علم...

ج - لا تتعب نفسك فهذا يكفي. أعلم أنك تعرف ماذا تدرس الهندسة. ولكي  
سوف أعطيك فقط تعريفا للهندسة ذلك التعريف الذي أعجب الرياضي  
العظيم فيليكس كلاين (ألماني - ١٨٤٩ - ١٩٢٥ -)  
بقول التعريف:

الهندسة هي ذلك المجال من الرياضيات الذي يقول أهل الرأي إنها قد  
سميت بهذا الاسم لأسباب عاطفية وتقليدية!

س - أنا أيضا أعجبتني هذا التعريف.

ح - كنت أعلم أنك ستعجب به. ومع ذلك فلا يمكن اعتباره - بشكل هام -  
تعريفا مازحا للهندسة، ذلك أنه يعكس حقيقة عميقة عنها وسوف نفهم  
ذلك تماما عندما نتعرف عن قرب على مختلف مجالات الرياضيات

الرياضي الذي لا يهرم:

س - وكيف أنهم هذا العنوان؟ هل اكتشف الرياضيون الأكبر الساب؟ هذا  
مضحك. كيف يمكن للرياضي ألا يهرم؟

ج - إنهم لم يكتشفوا «أكسيرة» الشاب . ومع ذلك فإن هذا الرياضي الشاب دائما .  
بالعمر والفكر - موجود فعلا .

س - هذا حشر شيق جدا . ماهذا الرياضي ومن هو؟ وابن يعيش؟ وكيف نمكن  
من الحفاظ على شباب دائم؟

ج - الإجابة على كل هذه الأسئلة بسيطة جدا . ولكن دعني أولا أقص عليك كيف  
ظهرت فكرة «بناء» هذا الرياضي الذي لا يهرم .

من المعروف أن الإنسان يكتسب ويرداد حرة وتجربة بمرور الأيام . وهذه  
حالة إيجابية بصورة عامة . ولكننا نلاحظ أن التجارب المصنعة والخبرات  
المكتسبة تحول أحيانا دون فهم الإنسان لموضوعات أو مفاهيم أو تجارب  
جديدة بسبب صعوبة التكيف معها . وهذه حالة سلبية تؤدي إلى التقليل من  
قدراته على الابتكار والابداع .

س - نعم . فأنا أعلم جيدا ما الفرق بين الكبار .

ج - أنا لا أحدث عك . لقد فكر الرياضيون في هذه المشكلة ، وتوصلوا إلى  
النتيجة التالية : بهدف السعي لنظور أكبر للمعلوم الرياضية بصورة عامة ،  
لا ضرر من إيجاد رياضي يتميز بامتلاكه معارف رياضية عالية ، وفي  
حرة وتجارب كثيرة ويفي مع ذلك شيئا إلى الأبد لكي يمكن باستمرار  
وسهولة من استيعاب الجديد في عالم الرياضيات ولديه القدرة على إعطاء  
الابداعي باستمرار . ولقد صبح الرياضيون بأنفسهم هذا الرياضي

س - وكيف صنعوه؟

ج - صنعوه بالشكل التالي : اتفق جماعة من الرياضيين الفرنسيين الشباب على أن  
يكنوا ويشيروا أبحاثهم الرياضية تحت اسم «مستعار» «بمولا بورباك»  
( Bourbaki N ) .

س - وهل هذا هو الرياضي العالم والذي لا يهرم؟ ولكي لم أفهم لماذا لا يهرم؟ ذلك

ان مجموعة الرياضيين الشاب سوف تهزم مع الزمن وتصبح في وقت ما . . . . رياضيين عجائز

ج - هذا صحيح . ولكنهم تمكنوا من التعلم على هذه المشكلة بطريقة مبتكرة جدا . فما ان يبلغ أحد أعضاء المجموعة عمرا معيا حتى يتحروا بدلا منه رياضيا شابا جديدا . وهكذا يبقى العمر الوسطي للجماعة هو نفسه باستمرار . أي ان يقولوا بورباك لا يهزم

س - هذا حل ممنوع فعلا . ولكي انساءل . كيف يكتنون معا أبحاثهم القيمة ؟

ج - لا أحد يعرف تماما كيف تظهر أعمالهم المشتركة . ولكنهم يتعاونون - على الأرجح - على الشكل التالي : عندما يكلف أحدهم بكتابة شيء ما ، أو البحث في موضوع معين ، فإنه يكتبه ثم يوزعه على بقية أعضاء الجماعة ، وبعد دراسته يجتمعون جميعا ليعرض كل منهم رأيه ، وليبحثوا معا الأخطاء ويصححوها وينقدوا ويقوموا بهذا العمل

س - . . . . وذلك تماما كما يفعل مدرسوننا معا عند الامتحان

ح - ربما كان التشبيه صحيحا ولكن «الامتحان» هنا أصعب بكثير ، وعندما يدرس هذا النص أو البحث وتعاد كتابته بشكل صحيح ، بشر تحت اسم .  
يقولوا بورباك .

س - ولماذا لا يكتنون كتبنا المدرسية بهذا الشكل ؟

ج - لانسأل أسئلة ناعمة !!

أين توجد نقاط أكثر . على المستقيم ، أم على القطعة المستقيمة ؟

ج - لا توافق معي أن هذا السؤال غريب إلى حد ما ؟

س - سؤال مضحك وليس غريبا .

ج - ولماذا هو سؤال مضحك ؟

س - لأنه يكفي أن نطرح إلى الرسم أو تتصور لعكس مستقيماً  $\overleftrightarrow{AC}$  وقطعة



مستقيمة  $\overleftrightarrow{AB}$  جزء لتعطي جواباً واضحاً:

يوجد نقاط على المستقيم أكثر بكثير مما هو على القطعة المستقيمة، ولا يلزمك لذلك أي معرفة سابقة بالرياضيات.

ج - هل أنت واثق من صحة إحاثك؟ وكيف تستطيع إثباتها؟

س - وماذا أثبت في إحاثي؟ إن كل شيء واضح فالقطعة المستقيمة هي جزء من مستقيم محدود بنقطتين، إذن كل نقاط القطعة المستقيمة هي (أي نفس الوقت) نقاط من المستقيم، ثم إنه يوجد على المستقيم نقاط أخرى كثيرة غيرها من هنا نستنتج أن نقاط المستقيم أكثر بكثير من نقاط القطعة المستقيمة وأما متأكد من صحة إحاثي. قد أكون ضعيفاً في مادة الرياضيات ولكن نظري جيد وعيني لا تخدعني؟

ج - لنفترض أن «نظرك» جيد ومع ذلك نعال لتذكر معاً: كيف يمكن أن نرى أن مجموعتين لهما نفس العدد من العناصر؟

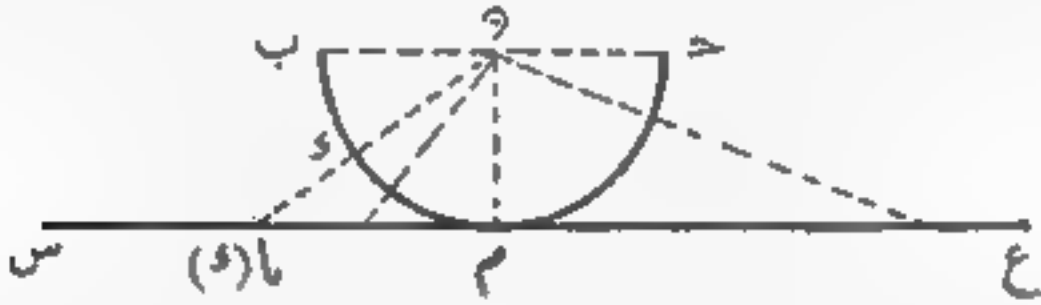
س - يمكن أن نرى أن لمجموعتين نفس العدد من العناصر إذا أمكن إيجاد تقابل بينهما أما إذا وجدنا تطبيق تقابل من إحدى المجموعتين إلى مجموعة جزئية من المجموعة الثانية عمدت تكون المجموعة الثانية ذات عناصر أكثر من المجموعة الأولى. أنا لم أنس ذلك.

ج - أنا سعيد جداً لأنك ما تزال تذكر هذه الخاصية الهامة غير أنما قبل أن نجيب على السؤال الذي طرحناه في بداية المحادثة، لا بد لنا - ولإراحة صميرنا فقط - من أن نحاول تطبيق هذه النظرية على مجموعة نقاط القطعة المستقيمة ومجموعة نقاط المستقيم. أي لنحاول البحث عن تطبيق - تقابل - فيما بينهما س - إذا كنت مصرّاً، أستطيع موافقتك (وإن كنت متأكداً من أنك تصح الوقت



سدى) كيف نجد هذا التطبيق - التقابل؟

ح - يمكن إيجاد هذا التطبيق وتعبده بكل ساطة ، وسوف نستخدم لذلك طريقة هندسية . لتصور أننا «ثيلاء» القطعة المستقيمة  $\overline{ب ج}$  وشكلنا منها نصف دائرة (نعتبر أن القطعة المستقيمة  $\overline{ب ج}$  هي محيط) أما المستقيم  $\overleftrightarrow{س ع}$



سجعلها مماسا لنصف الدائرة بالقطعة  $\overline{م}$  يمكن أن نجد تقابلا بين نقاط نصف الدائرة ونقاط المستقيم بالشكل التالي . إذا كانت  $د$  نقطة من نصف الدائرة التي مركزها  $ن$  فإن المستقيم  $\overleftrightarrow{ن د}$  يقطع المستقيم  $\overleftrightarrow{س ع}$  في نقطة معينة ، نرمز لهذه النقطة بـ  $أ$  (د) مادامت تتعلق بالنقطة  $د$  .

إذن النقطة  $د$  من نصف الدائرة تقابلها النقطة  $أ$  (د) من المستقيم  $\overleftrightarrow{س ع}$  . إذا تحولت النقطة  $د$  على القوس  $\overline{م د ب}$  ، فإنها سوف «تجبر» معها النقطة  $أ$  (د) على نصف المستقيم  $\overleftrightarrow{م س}$  وإذا أخذنا النقطة  $د$  على القوس  $\overline{م ج}$  فإن حركة النقطة على هذا القوس سوف تجعل  $أ$  (د) تتحرك على نصف المستقيم  $\overleftrightarrow{م ع}$  .

وهذا الشكل أوجدنا تقابلا بين نقاط نصف الدائرة (التي حصلنا عليها من ثني القطعة المستقيمة  $\overline{ب ج}$ ) ونقاط المستقيم  $\overleftrightarrow{س ع}$  . استنادا إلى هذا لتقابل نصل إلى أن . . . .

س - أمر مذهش حقا . يتضح من هذا أن القطعة المستقيمة فيها نقاط بقدر نقاط المستقيم . إن هذا شبيه «بالسحر» .

ج - هذا ليس صحيحاً، وإنما برهان بوضوح ويؤكد ضرورة عدم الاعتماد كلياً على  
الطرق، وهذا السبب بالذات فإن الرياضيات لا تأخذ بعين الاعتبار الصور  
والملاحظات كبرهان على نظرية معينة ويجب أن نعترف أنهم على حق،  
فالرسوم قد تكون مفهومة أحياناً وموضحة. ولكنها تعود - في أحيان أخرى -  
إلى طريق خاطئ.

س - سوف أحفظ هذا جيداً لكي لا أجدع نفسي بعد ذلك ولكن هناك شيئاً آخر  
يشغلي حول المستقيم

ج - وما هذا الشيء بالتحديد؟

س - ما عدد النقاط الموجودة على المستقيم؟

ج - هم م هم .، صدقني إن سؤالك هذا ليس بسيط (يجب أن أهيئ  
أحدث معه بسرعة، وإلا فسوف أجد نفسي في مأزق إذا لم يتوقف محدثي  
عن طرح الأسئلة) يجب الاعتراف بأنني لم أحص عدد النقاط على المستقيم  
أدنا، ولكن تعال لصدق الرياضيين الذين يؤكدون أنه يوجد على المستقيم  
نقاط بقدر الأعداد الحقيقية. (من يدري؟ ربما قام أحدهم بعد هذه  
النقاط) ونمرر لعدد النقاط على مستقيم الأعداد، أو عدد الأعداد الحقيقية  
بالحرف C والذي هو الحرف الأول من الكلمة اللاتينية Continuo ونعني  
مستمراً وإذا مررنا لمجموعة الأعداد الحقيقية - C فإن رئيس لمجموعة C  
هو C أي:  $C = (C)$

وفي عام ١٨٧٣ برهن كانور (في رسالته التي كتبها لصديقه ديديكند،  
والتي ذكرناها في بداية هذا الكتاب) أن رئيس مجموعة الأعداد الحقيقية أكبر  
من رئيس مجموعة الأعداد الطبيعية أن  $r(C) < r(P)$ ، أو أن  
 $C < \aleph$  وبذلك توصل كنتور إلى أنه لا يمكن عد نقاط المستقيم، ولا يمكن  
عد الأعداد الحقيقية لأنه لا يمكن أن نصنعها في تقابل مع مجموعة الأعداد  
الطبيعية، وأنه لا يوجد تقابل بين نقاط المستقيم وبين مجموعة الأعداد

الطبيعية إذن  $C < M$  (ط). وهذه النتيجة أصبحت، في الوقت نفسه، بداية لظهور نظرية المجموعات، وباستطاعتنا أن نهي حديثنا عند هذا الحد.

غير أنني أستطيع أن أضيف أن هذا المثال الأخير يشير إلى أن نظرية المجموعات ضرورية ولا بدليل لها لدى تشكيل تطبيقات ثنائية للمقادير اللاهائية. ففي واقع الأمر أن هذه النظرية قد ظهرت بسبب ضرورتها عندما بدأ الرياضيون دراسة مثل هذه المشكلات - المتعلقة بالمجموعات اللاهائية-، والتي لم يكن بالإمكان حلها بدون هذه النظرية. فلو لم تكن نظرية المجموعات معروفة لكان من الضروري أن بتكرها

ألا توافقي على ذلك؟



## الفصل الخامس حلول وإجابات (\*)

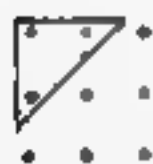
- 1 نقاط المستقيم ق مع المستوى ي هو النقطة ب  
عندئذ يكتب : أن التقاطع هو المجموعة المؤلفة من النقطة الوحيدة ب أي  
ق  $n$  ي = {ب} . أما إذا كان المستقيم ق موازيا للمستوى فإن تقاطعها  
هو مجموعة خالية أي ق  $n$  ي =  $\emptyset$  .  
أما إذا كان المستقيم ق مطبقا على المستوى ي فإن ي يحوي المستقيم ق  
عندئذ يكون تقاطع ق مع ي هو المستقيم ق نفسه أي ق  $n$  ي = ق  
2. - إن عدد عناصر مجموعة المرق س/ع يساوي الفرق بين عدد عناصر  
المجموعتين س وع فقط في حالة كون المجموعة ع مجموعة حرة من  
المجموعة س، أي في حالة :  $C \supset S$  .  
3. عملية توزيع الرسائل سوف تكون :  
أ- تطبيقا متابنا إذا كان موزع البريد يوزعها بالشكل التالي .  
في كل بيت يضع رسالة واحدة على الأكثر .  
ب - تطبيقا عامرا ( شاملا ) إذا كان موزع البريد يضع في كل بيت رسالة  
واحدة على الأقل (أي أنه يمكن لموزع البريد أن يضع في البيت أكثر من  
رسالة ، ومن المهم هنا أن مجموعة البيوت تصح «معمورة» بالرسائل  
ج - تقابلا إذا كان موزع البريد يضع في كل بيت رسالة واحدة فقط (في هذه  
الحالة : يجب أن يكون عدد الرسائل مساويا لعدد البيوت في القرية)  
4. إن الزوج المرتب ( ب ، ج ) ليس مجموعة مؤلفة من عنصرين حتى إذا كان  
ب = ج . إلا أنه في هذه الحالة تكون المجموعة {ب ، ب} مؤلفة من عنصر

(\*) نورد هنا حلول التمارين التي وردت في الكتاب مرقمة بالأرقام (1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5) .  
وكذلك الإحالة على بعض التساؤلات التي وردت فيها

وحيد هوب .

5. إن القعتين تزلفان زوجا، أما زوج الأحذية فهو زوج مرتب.
6. إن المجموعتين  $x$  ك و  $x$  ك من غير متساويتين، ذلك أنهما لا تحويان عناصر متماثلة فالزوج المرتب (قلم، دفتر) يختلف عن الزوج المرتب (دفتر، قلم).
7. المجموعتان  $x$  ك و  $x$  ك من متكفتان بالقدرة لأن فيهما نفس العدد من العناصر. ويمكن أن توجد تقابلا بينهما بالشكل: نقابل العنصر (ب، ج) من الأولى بالعنصر (ج، ب) من الثانية.
8.  $x$  ص = { (قلم، قلم)، (قلم، مسطرة)، (مسطرة، قلم)، (مسطرة، مسطرة) }.
- ك  $x$  ك = { [ دفتر، كتاب)، (كتاب، دفتر)، (دفتر، دفتر)، (كتاب، كتاب) }.
9. - إن عدد عناصر حاصل الضرب الديكارتي  $x$  ع للمجموعتين  $x$  ع، ع يساوي (حاصل ضرب) عدد عناصر  $x$  ع بعدد عناصر  $x$  ع.
10. المساواة غير صحيحة في كل من ١٠ - ١١، ١١ - ١٣.
11. المساواة ١١ - ١، ١١ - ٢، ١١ - ٣، ١١ - ٤ صحيحة من أجل أي ثلاثة أعداد طبيعية  $\mathbb{N}$ ، ب، ج.
- ١١ - ١١ صحيحة فقط في حالة  $\mathbb{M} = ١$ .
- ١١ - ٦ غير صحيحة من أجل عدد طبيعي (لا نعثر هنا أن العنصر عدد طبيعي).
- ١١ - ٧ صحيحة من أجل أي عدد طبيعي.
- ١١ - ٨ غير صحيحة من أجل الأعداد الطبيعية.
- ١١ - ٩، ١١ - ١٠ صحيحة من أجل أي أعداد طبيعية.
- ١١ - ١١ صحيحة فقط في حالة  $\mathbb{M} = \mathbb{B}$ .
- ١١ - ١٢ صحيحة من أجل أي عدد طبيعي.

12 بمقارنة العلاقات ١٠ - ١ إلى ١٢ - ١٠ مع المساواة ١١ - ١ إلى ١٢ - ١١ نجد أن المساواة ١١ تنتج من العلاقات ١٠ بتبديل الإشارة  $\cap$  بـ  $\times$ ، والإشارة  $\cup$  بالرمز  $+$ ، والإشارة  $/$  بالرمز  $-$ ، وتبديل المجموعات  $\mathcal{A}$ ،  $\mathcal{B}$  بالاعداد  $1$ ،  $2$ ،  $3$ ،  $4$ ،  $5$ ،  $6$ ،  $7$ ،  $8$ ،  $9$  لا تصحان في حالة الأعداد الطبيعية.



13 لوصح بالرسم عددين متتاليين من الأعداد «المثلث»  
لنأخذ مثلا العددين ٣ و ٦  
مجموع العددين  $3 + 6 = 9$  والعدد ٩ هو ٣

أي مربع عدد صحيح . ويمكن أن يناقش الأمر بشكل مماثل في الحالات العامة.

14. نجد هنا عددا آخر ( كاملا أو مقاليا ) من أجل  $n=4$

$$1 + n = 1 + 4 = 5 \quad 1 + 4 = 5 \quad 1 - 2 = 1 - 2 = -1 \quad 31 = 1 - 2 = -1 \quad \text{والعدد } 31$$

هو عدد أولي ولذلك فإن  $31 = (1 - 2^5) \cdot 2 = (1 - 2^4) \cdot 2 = (1 - 2^3) \cdot 2 = (1 - 2^2) \cdot 2 = (1 - 2) \cdot 2 = 31 \times 16 = 496$

عدد كامل أو مثالي . قواسم هذا العدد هي :

$$1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248 \text{ ويكون مجموعها يساوي } 496 \\ 496 = 248 + 124 + 62 + 31 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

ويمكن إيجاد هذا العدد باستخدام القانون  $2^{n-1} (1 - 2^n)$  حيث أن  $n=5$  (عدد أولي) المحرر

15. إن مربع أي عدد ليس عددا أوليا لأنه يمكن كتابته (المربع) بشكل جداء أعداد أولية (هو العدد في نفسه).

16 لا يوجد أكبر عدد طبيعي ، وإذا افترضنا أنه يوجد عدد طبيعي  $N$  هو أكبر

عدد طبيعي ، فإننا بواسطة إضافة الواحد إليه نحصل على عدد أكبر منه هو  $1 + N$  وبالتالي فإن  $N$  ليس أكبر عدد طبيعي .

17. العدد الطبيعي ١ ليس له سابق في مجموعة الأعداد الطبيعية، أما بقية الأعداد الطبيعية فلكل عدد منها ن سابق هو  $n-١$  .

18. هذه النتيجة صحيحة فقط من أجل المجموعات اللانهائية القابلة للعد.

ذلك أن المجموعات اللانهائية تقسم إلى : مجموعات قابلة للعد وأخرى غير قابلة للعد، والمجموعات القابلة للعد هي المجموعة التي تحوى عناصر بقدر عنصر مجموعة الأعداد الطبيعية . فالمجموعة اللانهائية يمكن عدّها إذا أمكن ترقيم عناصرها بالأعداد الطبيعية، وهذا يعني أن المجموعات تكون قابلة للعد فقط إذا كان هناك تقابل بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية، أما المجموعة غير القابلة للعد فهي المجموعة التي لا يمكن ترقيم عناصرها بالأعداد الطبيعية : مثلاً : مجموعة نقاط المستقيم ومجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعات غير قابلة للعد.

فالأعداد الحقيقية مثلاً لا يمكن وضعها في (سلسلة). (كما فعلنا بالأعداد الفردية والزوجية)، ثم ترقيم هذه السلسلة بالأعداد الطبيعية . (وهذا ما أوضحه كانتور في عام ١٨٧٣) إذن لا يمكن أن نجد تقابلاً بين مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد الطبيعية. استناداً لذلك نتوصل إلى النتيجة التالية: أن الأعداد الحقيقية هي أكثر من الأعداد الطبيعية، مع أن المجموعتين لا نهائيتان. وفي الحالة العامة تكون المجموعات غير القابلة للعد ذات عناصر أكثر من المجموعات القابلة للعد.

19. الأمر لا يتم تماماً بهذا الشكل «الزلاء يغادرون الفندق، والفندق يبقى مليئاً، فهناك حالتان لا يبقى في الفندق بعدها عدد لا نهائي من الزلاء . الحالة الأولى يبقى الفندق بعدها فارغاً، والحالة الثانية: يبقى في الفندق بعدها عدد منته من الزلاء . والفندق يصبح فارغاً إذا غادره ط من الزلاء،

حيث  $\tau$  هي مجموعة الأعداد الطبيعية، لأنه في هذه الحالة يبقى في الفندق  $\tau/\tau = 1$  أي يصبح خالياً

أما إذا عادر الفندق كل الرلاء الذين يشغلون الغرف ذات الأرقام أكبر من  $n$  (حيث  $n \in \tau$ ) سوف يبقى في الفندق  $n$  من الرلاء (عدد منه 2. وهذه الحالة يمكن أن نكتبها  $\tau / (\tau / \{1, 2, 3, \dots, n\}) = \{n\}$ ، أما في بقية الحالات، فإنه يبقى في الفندق عدد لا نهائي من الرلاء مهما يكن عدد الذين غادروه. فإذا عادر الفندق الرلاء الذين يشغلون الغرف ذات الأرقام الفردية فإننا نكتب هذه الحالة بالشكل 'يبقى في الفندق'  $\tau / (1 + 2n) = \{2n, 2n+1\}$

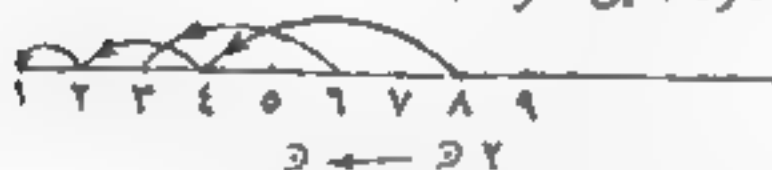
20. لنفرض أنه عادر الفندق عدداً نهائياً من الرلاء، السؤال هنا لا معنى له، ذلك أنه في هذا الترتيب لغرف الفندق اللانهائية لا يوجد غرفة لا نهائية (ذلك أن مجموعة الأعداد الطبيعية ليس فيها عدد «أحبر»).

21. لنفترض أنه قد عادر الفندق كل الرلاء الذين يشغلون الغرف ذات الأرقام الفردية. 1، 3، 5، 7، ... فكيف تنصرف الإدارة في الفندق؟ في هذه الحالة سوف تشغل الإدارة الغرف الخالية (ذات الأرقام الفردية) بالشكل التالي):

تنقل نزيل الغرفة 2 إلى الغرفة 1

ونزيل الغرفة 4 إلى الغرفة 2

ونزيل الغرفة 6 إلى الغرفة 3



وبصورة عامة تنقل نزيل الغرفة  $2n$  إلى الغرفة  $n$  حيث  $n = 1, 2, 3, \dots$

22. إن الفرق  $x - y$  يمكن أن تكون أي عدد فهي يمكن أن تساوي العدد صفر أو تساوي العدد  $x$  لذلك فحين نكتب  $x - y \geq x$  انظر مرة أخرى إلى



## حل التمرين 19.

23. يقصد به هنا هندسة لوباتشفسكي (٢٢) وريمان (٢٣) وهذه الهندسات الثلاث مسلّمات حول التواري تختلف الواحدة منها عن الأخرى اختلافا جوهريا، وكلها تتعلق بإمكانية رسم مستقيم موار لمستقيم مفروض من نقطة خارج المستقيم المفروض (أو حول الخطوط الحيدوبيزية لمستوى). في هندسة ريمان نجد أنه من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم أي موار لهذا المستقيم أما في هندسة لوباتشفسكي فنجد أنه من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيمين موازيين لهذا المستقيم، في هذه الحالة نصبح النظرية التالية صحيحة:

من أي نقطة خارج مستقيم يمر مستقيمان موازيان للمستقيم المفروض ونمر مجموعة لا متناهية من المستقيمات التي يكون المستقيم المفروض عبر موار وعبر قاطع لها ومن الطبيعي أن يكون تعريف التواري في هذه الحالة مختلفا عما هو معروف لدينا في هندسة أقليدس.

تختلف هذه الهندسات الثلاث - أيضا - في قياسها للروايا الداخلية للمثلث. ففي هندسة لوباتشفسكي، مجموع قياس زوايا المثلث الداخلية أصغر من قائمتين وفي هندسة ريمان، مجموع قياس زوايا المثلث الداخلية أكبر من قائمتين. أما في هندسة أقليدس: فمجموع زوايا المثلث الداخلية يساوي قائمتين.

24. عند طرح العدد الطبيعي الصغير من العدد الطبيعي الكبير نحصل دوما على عدد طبيعي إدد ' إذا كان ب، جـ ط فإن ب - جـ يكون عددا طبيعيا إذا كان ب < جـ.

(٢٢) نيكولاي إيفانوفيتش لوباتشفسكي ( ١٧٩٤ - ١٨٥٦ م ) عالم رياضيات سوفييتي - أساد جامعة قازان. (Lobachevski NI)

(٢٣) برنارد ريمان - ١٨٢٦ - ١٨٦٦ م ) عالم رياضيات ألماني - أساد جامعه غوس (Riemann) (B.

25. إذا كان المقسوم عليه هو أحد قواسم المقسوم فإن ناتج القسمة هي عدد طبيعي دوماً. أي أن ب/جـ (حيث ب، جـ ∈ ط، حـ ∩ ط) هو عدد طبيعي إذا كان جـ هو أحد قواسم العدد بـ

26. لا ندرس في الأعداد الطبيعية فك الأقواس (بصورة عامة).  
[ ذلك أننا لا ندرس عملية فك القوس المسبوق بإشارة (-) في الأعداد الطبيعية ].

27. مجموعة الأعداد الطبيعية غير متراصة ذلك أنه بين عددين طبيعيين متتاليين لا يوجد عدد طبيعي ثالث يختلف عنهما.

28. إذا رمزنا لرئيس مجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز C ولرئيس مجموعة الأعداد الطبيعية بـ  $X$  فإن  $C = 2^X$ .  
لنتذكر أن مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة لا نهائية، ولكن قابلة للعد. أما مجموعة الأعداد الحقيقية فهي مجموعة لا نهائية وغير قابلة للعد.

$$29. \quad {}^110 \times 9 + {}^110 \times 1 = 19$$

$${}^110 \times 4 + {}^110 \times 3 + {}^210 \times 2 = 234$$

$${}^110 \times 3 + {}^110 \times 0 + {}^210 \times 9 = 903$$

$${}^110 \times 9 + {}^110 \times 6 + {}^210 \times 4 + {}^310 \times 1 = 1469$$

$$30. \quad 10001 = {}^12 \times 1 + {}^12 \times 0 + {}^22 \times 0 + {}^22 \times 0 + {}^12 \times 1 = 1 + 16 = 17$$

$$0201 + {}^12 \times 1 + {}^22 \times 1 + {}^22 \times 0 + {}^12 \times 1 = 1 + 2 + 4 + 16 = 23$$

$$.10111$$

$$+ {}^12 \times 0 + {}^22 \times 1 + {}^22 \times 1 + {}^12 \times 0 + {}^02 \times 1 = 1 + 4 + 8 + 32 = 45$$

$$101101 = 2 \times 1$$

• لكنا لا نعرف «كم» هو عدد عناصر مجموعة الأعداد الحقيقية حسب فهمنا المألوف للكلمة «كم». المحرر.

$$+ {}^2 2 \times 1 + {}^1 2 \times 1 + {}^0 2 \times 1 + {}^2 2 \times 1 = 1 + 2 + 16 + 32 + 64 = 115$$

$$11100011 = 2 \times 1 + {}^1 2 \times 1 + {}^2 2 \times 1$$

$$+ {}^1 2 \times 1 + {}^0 2 \times 1 + {}^2 2 \times 1 + {}^3 2 \times 1 + {}^4 2 \times 1 = 4 + 16 + 256 = 324$$

$$1010000100 = 2 \times 1 + {}^1 2 \times 1 + {}^2 2 \times 1 + {}^3 2 \times 1$$

$$+ {}^0 2 \times 1 + {}^1 2 \times 1 + {}^3 2 \times 1 + {}^4 2 \times 1 + {}^5 2 \times 1 = 128 + 512 = 640$$

$$10110000000 = 2 \times 1 + {}^1 2 \times 1 + {}^2 2 \times 1 + {}^3 2 \times 1 + {}^4 2 \times 1$$

31. يمكن أن نصل إلى نفس النتيجة بتبديل الإشارات الصوتية بالأعداد صفر واحد. عندما يكون الصوت مصاء نضع ١، الصوت غير مصاء نضع ٠، لير الكتابة الموافقة في التعداد الثاني والتعداد العشري فجد

$$\begin{array}{r} 101 \\ 0 \\ + 6 \\ \hline 1011 \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \\ + 101 \\ \hline 1011 \end{array}$$

في التعداد الثاني و  $\frac{+6}{11}$  في التعداد العشري

32. في ٨ ك = ٨ ق

[ لبرهان العلاقات 32 وحتى 38 نضع جدول الصواب لها ]

ق	ك	ق ٨ ك	ك	ق	ك ٨ ق
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	ص	ح	خ
خ	ص	خ	ح	ص	خ
ح	خ	خ	ح	خ	خ

33. ق ٧ ك = ك ٧ ق

ق	ك	ق ٧ ك	ك	ق	ك ٧ ق
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	ص	ح	ص
ح	ص	ص	خ	ص	ص
خ	ح	ح	خ	خ	ص

34. ق ٧ ك = ك ٧ ق

ق	ك	ق ٧ ك	ك	ق	ك ٧ ق
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	ح	خ
ح	ص	خ	خ	ص	خ
خ	خ	ص	خ	خ	ص

35. ق ٧ ك = ك ٧ ق (مرك)

ق	ك	مرك	ك ٧ ق (مرك)	ق ٧ ك (مرك)
ص	ص	خ	خ	ح
ص	خ	ص	ح	خ
خ	ص	ح	ح	ص
خ	خ	ص	خ	ص

36. ق ے (ك ۸ ق)

ق	ك	ك ۸ ق	ق ے (ك ۸ ق)
ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ
خ	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص

37. (ق ۸ ك) ے ق

ق	ك	ق ۸ ك	(ق ۸ ك) ے ق
ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص
خ	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص

38. ك ے (ق ۷ ك)

ق	ك	ق ۷ ك	ك ے (ق ۷ ك)
ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	ص
خ	خ	خ	ص

## سرد أبجدي باللغة الإنجليزية لبعض المصطلحات الرياضية الواردة

$A \sim B$	A تكافئ أو تساوى B بالقدرة
Actually Listing	طريقة القائمة ( لكثانة المجموعة )
Algebra of Logic	جبر المنطق
Associative	تجميعي
Axiom	مسلمة ( مصادرة أو موضوع )
Biconditional	... إذا وفقط إذا ... ( اقتضاء ثنائي )
Bijective	تقابل ( تطابق )
Binary Operation	عملية ثنائية ( ثنائية )
Card (X)	رئيسي مجموعة : $n(X)$
	طريقة القاعدة أو الصفة المميزة ( لكثانة المجموعة )
Characterizing Property	
Closed Set	مجموعة مغلقة
Co - domain	المستقر ( المجال المقابل )
Commutative	إبدالي
Compact Set	مجموعة متراسة
Complement	متضمنة
Conditional	إذا ... فإن ( اقتضاء )
Conjunction	أداة الربط ( و )
Disjunction	أداة الربط ( أو )
Domain	المطلق ( المجال )
Element	عنصر

Empty Set	المجموعة الخالية
Equal Sets	المجموعات المتساوية
Equation	معادلة
Exristential Quantifier	$\exists$ (يوجد على الأقل)
First Element	المسقط الأول ( للزوج المرتب)
Function	تابع ( دالة أو تطبيق )
Ideal Number	العدد المثالي
In Finity	اللانهاية
Injective	متباين ( تطبيق )
Intersection	تقاطع
Line Co - ordinatc System	محور إحداثي
Mapping	تطبيق ( تابع ، دالة )
Natural Number	عدد طبيعي
Negation	مرنفي ( قضية )
Neutral Element	عنصر محايد
Open Sentence	جملة مفتوحة
Ordered Pair	زوج مرتب
Ordered Set	مجموعة مرتبة
Ordinal Number	عدد ترتيبي
Pair	زوج
Prime Number	عدد أولي
Product	جداء ( حاصل ضرب )
Rational Number	عدد عادي ( نسبي )
Real Number	عدد حقيقي
Second Element	مسقط ثاني (زوج مرتب)

Set Theory	نظرية المجموعات
Statement	قضية منطقية (عبارة)
Subset	مجموعة جزئية
Surjective	غامر أو شامل (تطبيق)
The Connectives	أدوات الربط
The Number line	خط الأعداد
Transformation Geometry	هندسة التحويلات
Uncountable Set	مجموعة غير قابلة للعد
Union	اجتماع ( الاتحاد )
Universal Quantifier	$\forall$ ( لكل أو لجميع )
Variable	متحول ( متغير )
Venn Diagram	مخطط فن
Well - Ordered Set	مجموعة مرتبة جيداً
Y Image of X	مع صورة من
Z - Set of Integrs	ص - مجموعة الأعداد الصحيحة





## المتريجة في سطور

- د. فاطمة عبد القادر المما
- من مواليد سورية
- حصلت على درجة الماجستير في العلوم الرياضية والفيزيائية من جامعة لينين البلاروسية عام ١٩٧٨.
- حصلت على درجة دكتوراه فلسفة في التربية عام ١٩٨٢.
- أشرفت على طلاب التأهيل في المجلات التربوية السورية حول تطوير الرياضيات المدرسية وتطوير مناهجها وطرائق تدريسها.
- تعمل حالياً موجهة أولى للرياضيات بوزارة التربية السورية.



معالم على طريق  
تحديث الفكر العربي  
تأليف : د. معن زيادة

مكتبة عمل

[ask2pdf.blogspot.com](http://ask2pdf.blogspot.com)